Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 1, 141–153

УДК 517.956.223

С. В. Лисенко, А. П. Петравчук,
В. В. Степух

(Київський Національний університет імені Тараса Шевченка, Механіко-математичний факультет, вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна)

Централізатори елементів в алгебрах Лі диференціювань полів

apetrav@gmail.com, svvhelios@gmail.com

Let K be an algebraically closed field of characteristic zero and R an algebraic extension of the field of rational functions $K(x_1, ., x_n)$ in n variables. We study centralizers of elements in the Lie algebra $Der_K R$ of all K-derivations of the field R. If F is the field of constants of a derivation $D \in Der_K R$ on R and $tr.deg_K F \leq 2$ then a characterization of the centralizer $C_{Der_K(R)}(D)$ is given depedent on $tr.deg_K F$.

Нехай K — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль і R – алгебраїчне розширення поля раціональних функцій від n змінних $K(x_1, ., x_n)$. Вивчаються централізатори елементів в алгебрі Лі $Der_K R$ всіх K-диференціювань поля R. Якщо F – поле констант диференціювання $D \in Der_K R$ в R і $tr.deg_K F \leq 2$, то дано характеризацію централізатора $C_{Der_K(R)}(D)$ в залежності від $tr.deg_K F$.

1. Вступ

Нехай $\mathbb{K}$ — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, $\mathbb{K}(x_1, ., x_n)$ – поле раціональних функцій над $\mathbb{K}$ і $R \supseteq \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ — алгебраїчне розширення поля $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ (не обов'язково скінченне). Векторний $\mathbb{K}$-простір $W(R) = \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} R$ всіх $\mathbb{K}$-диференціювань поля R

утворює алгебру Лі відносно операції комутування (нагадаємо, що $\mathbb{K}$-лінійне відображення $D : R \to R$ називається $\mathbb{K}$-диференціюванням, якщо $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ для довільних $a, b \in R$). Будова алгебр Лі диференціювань асоціативно-комутативних кілець вивчалась багатьма авторами в різних часткових випадках (див., наприклад, [2], [6]). Зауважимо, що з геометричної точки зору у випадку $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ диференціювання можна розглядати як векторні поля на відповідних гладких многовидах. Вивчення алгебр Лі векторних полів на многовидах утворюють цілий напрямок в сучасній геометрії, математичній фізиці і алгебрі, який закладено ще в роботах С. Лі [4]. В даній работі вивчається будова централізаторів елементів алгебри Лі $W(R) = \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} R$. Відомо, що знання структури централізаторів елементів алгебри Лі дає важливу інформацію про саму алгебру Лі (див. наприклад, [1], [3], [8], [5]). При деяких умовах на степінь трансцендентності над $\mathbb{K}$ поля констант $F = F(D)$ диференціювання $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} R$ в R отримано характеризацію централізатора $C = C_{W(R)}(D)$ (нагадаємо, що поле констант диференціювання D – це підполе $F = \{r \in R \mid D(r) = 0\}$ з R). В роботі використовуються стандартні позначення, всі алгебри Лі розглядаються над довільним, але фіксованим алгебраїчно замкненим полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль, якщо не відзначене інше. Якщо C – система векторів з деякого векторного простору V над полем R, то, як завжди, рангом $\mathrm{rk}_R C$ системи C над R називається потужність довільної максимальної лінійно незалежної підсистеми з C. Нагадаємо, що підполе F поля R називається алгебраїчно замкненим в R, якщо кожний алгебраїчний над F елемент із R лежить в F. Якщо L підалгебра алгебри Лі $W(R)$, то полем констант для L в R називається підполе $F = F(L) = \{r \in R \mid D(r) = 0$ для всіх $D \in L\}$.

2. Допоміжні результати

Нижче, в наступних трьох лемах наводяться добре відомі комутаторні співвідношення і властивості диференціювань.

Лема 1. *Нехай $D_1, D_2 \in W(R)$ (нагадаємо, що $W(R) = \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} R$). Тоді для довільних $a, b \in R$ виконуються співвідношення*

$$[aD_1, bD_2] = ab[D_1, D_2] + aD_1(b)D_2 - bD_2(a)D_1.$$

Нехай L – довільна підалгебра алгебри Лі $W(R)$. Позначемо через RL множину всіх $\mathbb{K}$-лінійних комбінацій елементів виду aD, де $a \in$

$R, D \in L$; аналогічно можна визначити підмножину FL, де F – поле констант алгебри Лі L в R.

Лема 2. *Нехай L – підалгебра із $W(R)$ і FL, RL визначені вище. Тоді FL і RL є підалгебрами алгебри Лі $W(R)$ над полем $\mathbb{K}$. Крім того, FL є алгеброю Лі над полем F.*

Лема 3. *Нехай R – алгебраїчне розширення поля $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$. Тоді $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} R$ – векторний простір над полем R розмірності n і диференціювання $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, отримані продовженням частинних похідних поля $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ на R утворюють базис R-простору $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(R)$.*

Лема 4. *Нехай $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} R$, $D \neq 0$ і $F = \mathrm{Ker} D$ — поле констант для D в R. Тоді централізатор $C = C_{\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} R}(D)$ є векторним простором над F розмірності $\leqslant n$.*

Доведення леми 4.

Очевидно, що $F = \mathrm{Ker} D$ є підполем поля R. Позначимо через k ранг системи векторів C над R, $k = \mathrm{rk}_R C$ і візьмемо довільний базис $\{D_1, \ldots, D_k\}$ системи C над R. Очевидно, $FD_1 + \ldots + FD_k \subseteq C$. Візьмемо тепер довільний елемент $\overline{D} \in C$. Тоді $\overline{D} = a_1 D_1 + \ldots + a_k D_k$ для деяких $a_1, \ldots, a_k \in R$. Із рівності

$$[D, \overline{D}] = 0 = D(a_1) D_1 + \ldots + D(a_k) D_k$$

випливає, що $D(a_i) = 0$, $i = 1 \ldots, k$, тобто $a_i \in F$, $i = 1 \ldots, k$. Але тоді $C = FD_1 + \ldots + FD_k$ – векторний простір над полем F розмірності $k = \mathrm{rk}_R C \leqslant n$.

Лема 4 доведена.

Наслідок 1. *Якщо в умовах леми 4 $F = \mathbb{K}$, то централізатор $C = C_{Der_{\mathbb{K}} R}(D)$ — скінченновимірна над $\mathbb{K}$ підалгебра із алгебри Лі $W(R)$ і $\dim_{\mathbb{K}} C \leqslant n$*

Зауваження 1. В формулюванні леми 4 векторний простір C над полем констант F може не бути алгеброю Лі над F, хоча C, звичайно ж, є алгеброю Лі над полем $\mathbb{K}$.

Наступне твердження, швидше за все, не є новим, але не маючи точного посилання, ми даємо його нижче з доведенням.

Лема 5. *Нехай $D_1, \ldots, D_k$ – лінійно незалежні над R елементи з $W(R) = Der_{\mathbb{K}}(R)$. Тоді підполе констант $S = \cap_{i=1}^{k} Ker D_i$ для системи $\{D_1, \ldots, D_k\}$ має степінь трансцендентності над $\mathbb{K}$ не вище ніж $n - k$.*

Доведення леми 5.

Нехай, навпаки, твердження леми не виконується і $m = \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} S > n-k$. Виберемо який-небудь базис трансцендентності $\{y_1, \dots, y_m\}$ для S над полем $\mathbb{K}$. Доповнимо його до базиса трансцендентності поля R над $\mathbb{K}$ якими-небудь елементами $y_{m+1}, \dots, y_n$ і розглянемо диференціювання $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}$ підполя $\mathbb{K}(y_1, \dots, y_n)$ з R. Продовжимо ці диференціювання на R (таке продовження існує і єдине, оскільки R – алгебраїчне розширення поля $\mathbb{K}(y_1, \dots, y_n)$). Збережемо для зручності для продовжень диференціювань ті ж самі позначення. Диференціювання $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}, D_1, \dots, D_k$ поля R лінійно залежні над R (бо $m + k > n = \dim_R W(R)$ за нашим припущенням). Тому існує нетривіальна лінійна комбінація

$$\alpha_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + \alpha_m \frac{\partial}{\partial y_m} + \beta_1 D_1 + \ldots + \beta_k D_k = 0,$$

де $\alpha_i, \beta_i \in R$. Оскільки $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}$ лінійно незалежні над R, то хоча б один з коефіцієнтів $\beta_i, i = 1, \dots, k$ ненульовий. Розглянемо диференціювання

$$D = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + \alpha_m \frac{\partial}{\partial y_m} = -\beta_1 D_1 - \ldots - \beta_k D_k.$$

Всі елементи $y_{m+1}, \dots, y_n$, очевидно, лежать в $\mathrm{Ker} D = \mathrm{Ker}(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + \alpha_m \frac{\partial}{\partial y_m})$ і тому $D = -\beta_1 D_1 - \ldots - \beta_k D_k$ містить в своєму ядрі елементи $y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_n$. Останнє означає, що $D = 0$, що суперечить відміченому вище. Отримана суперечність показує що $m \le n - k$.

Лема 5 доведена.

3. Централізатори диференціювань з малими полями констант

Лема 6. *Нехай $\mathbb{K}$ – алгебраїчно замкнене поле характеристики 0, $R \supseteq \mathbb{K}(x_1, ..., x_n)$ — алгебраїчне розширення $\mathbb{K}(x_1, ., x_n)$ і F – підполе з R, алгебраїчно замкнене в R, яке містить $\mathbb{K}$. Позначимо: $N_0 = \{D \in W(R) \mid D(F) = 0\}, N_1 = \{D \in W(R) \mid D(F) \subseteq F\}$. Тоді $N_0 \subseteq N_1, N_0, N_1$ – підалгебри алгебри Лі $W(R)$ і N_0 - ідеал алгебри Лі N_1, який є векторним простором над R розмірності*

$\dim_R N_0 = n - \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} F$. *Далі, в* N_1 *існує підалгебра* $M, M \simeq \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} F$ *така, що* $N_1 = M \leftthreetimes N_0$ *– напівпряма сума.*

Доведення леми 6.

Якщо $D_1 \in N_0, D_2 \in N_1$, то для довільного елемента $f \in F$ маємо

$$[D_1, D_2](f) = D_1(D_2(f)) - D_2(D_1(f)) = 0$$

і тому, як неважко переконатися, N_0, N_1 – підалгебри алгебри Лі $W(R)$ і N_0 – ідеал в N_1. Якщо $D \in N_0$, то для довільного $g \in R$ має місце рівність $gD(F) = 0$ і тому $gD \in N_0$, тобто N_0 – векторний простір над полем R. Нехай $m = \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} F$. Покажемо, що $\dim_R N_0 = n - m$. Виберемо який-небудь базис трансцендентності $\{y_1, \ldots, y_m\}$ поля F над $\mathbb{K}$ і доповнимо його якими-небудь елементами $y_{m+1}, \ldots, y_n$ до базиса трансцендентності поля R над $\mathbb{K}$. Диференціювання $\frac{\partial}{\partial y_i}, i = 1, \ldots, n$ підполя $\mathbb{K}(y_1, \ldots, y_n)$ продовжимо (не змінюючи позначень) до диференціювань поля R. За умовою підполе F алгебраїчно замкнене в R і тому для диференціювань $\frac{\partial}{\partial y_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}$ виконуються рівності

$$\frac{\partial}{\partial y_{m+1}}(F) = \ldots = \frac{\partial}{\partial y_n}(F) = 0,$$

оскільки $\frac{\partial}{\partial y_i}(y_j) = 0, i = m+1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$. Тому $\frac{\partial}{\partial y_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n} \in N_0$ і, оскільки дані диференціювання лінійно незалежні над R, то $\dim_R N_0 \geq n - m$. Але, якби підалгебра N_0 містила більше ніж $n-m$ лінійно незалежних над R елементів, то степінь трансцендентності F над полем $\mathbb{K}$ не перевищував би $n-(n-m+1) = m-1$ з огляду на лему 5, що неможливо, бо за умовою леми $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} F = m$. Тому $\dim_R N_0 = n-m = n-\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} F$. Покладемо $M = F\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + F\frac{\partial}{\partial y_m}$. Легко бачити, що це підалгебра з $W(R)$. Очевидно, $M(F) \subseteq F$ і тому M – підалгебра з N_1. Неважко переконатися також, що $M \simeq \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} F$. Також безпосередньо перевіряється, що підалгебра N_0 має вигляд $N_0 = R\frac{\partial}{\partial y_{m+1}} + \cdots + R\frac{\partial}{\partial y_n}$. Нехай тепер $D \in N_1$. Тоді D індукує деяке диференціювання поля F, нехай $D(y_1) = f_1, \ldots, D(y_m) = f_m$ для деяких $f_1, \ldots, f_m \in F$. Але тоді, як неважко переконатися,

$$D - (f_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + f_m \frac{\partial}{\partial y_m}) \in N_0.$$

Отже, $N_1 = M \leftthreetimes N_0$, оскільки $M \cap N_0 = 0$.

Лема 6 доведена.

Зауваження 2. В формулюванні леми, при додаткових умовах $F \neq \mathbb{K}, F \neq R$ обидві підалгебри N_0 і M є простими алгебрами Лі (з огляду на основний результат роботи [2]) і, таким чином, підалгебра N_1 розкладається в напівпряму суму двох простих підалгебр.

Лема 7. *Нехай $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}R$, $D \neq 0$, $C = C_{Der_{\mathbb{K}}R}(D)$– централізатор елемента D і $F = \mathrm{KerD}$ — поле констант диференціювання D в R. Далі, позначимо $I = \{T \in C \mid T(F) = 0\}$. Тоді I — ідеал алгебри Лі C(як алгебри Лі над полем $\mathbb{K}$) і $rk_R C - rk_R I \leqslant \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}}F$.*

Доведення леми 7.

Легко бачити, що $C(F) \subseteq F$ (тобто для довільного $T \in C$ виконується $T(F) \subseteq F$). Тому, як неважко переконатися, I — ідеал алгебри Лі C (як алгебри Лі над $\mathbb{K}$). Виберемо який-небудь базис $\{D_1, \ldots, D_m\}$, $m = \mathrm{rk}_R I$ для системи векторів I над полем R і доповнимо цю систему якими-небудь елементами $D_{m+1}, \ldots, D_k$ до базису $\{D_1, \ldots, D_m, D_{m+1}, \ldots, D_k\}$ системи векторів C над R, де $k = \mathrm{rk}_R C$. Позначимо $s = \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}}F$; тоді $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}F$ – векторний простір розмірності s над полем F за лемою 3. Диференціювання $D_{m+1}, \ldots, D_k$ поля R індукують диференціювання поля F (над $\mathbb{K}$) і тому серед них не більше ніж s лінійно незалежних над F елементів. Тому,

$$\mathrm{rk}_R\{D_{m+1}, ., D_k\} = \mathrm{rk}_R C - \mathrm{rk}_R I \ \leqslant s = \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}}F.$$

Лема 7 доведена.

Нехай тепер $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ – алгебра многочленів над полем $\mathbb{K}$ і $W_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n])$ – алгебра Лі всіх її $\mathbb{K}$-диференціювань. Нагадаємо, що диференціювання D алгебри многочленів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ називається простим якщо $\{0\}$ и $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ є єдиними D-допустимими ідеалами алгебри $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Наступне твердження показує, що прості диференціювання мають "невеликі"централізатори.

Твердження 1. *Нехай $D \in W_n(\mathbb{K})$ - просте диференціювання кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Тоді централізатор $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ є скінченновимірною над $\mathbb{K}$ підалгеброю розмірності $\leq n$ з $W_n(\mathbb{K})$*

Доведення твердження 1. Продовжимо D до диференціювання поля раціональных функцій $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ і покажемо, що для такого продовження виконується рівність $\mathrm{Ker}D = \mathbb{K}$. Дійсно, нехай, навпаки, $f = u/v \in \mathrm{Ker}D, f \neq const, f$ – нескоротний дріб (тут $u, v \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$).

Із рівності

$$D(f) = 0 = \frac{D(u)v - uD(v)}{v^2}$$

випливає, що $D(u)v - uD(v) = 0$ і, оскільки u, v взаємно прості, то $u|D(u), v|D(v)$, тобто $D(u) = \lambda_1 u, D(v) = \lambda_2 v$ для деяких многочленів $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Далі, хоча б один із головних ідеалов $(u), (v)$ кільця $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ є власним і, очевидно, інваріантним відносно диференціювання D. Але тоді диференціювання D кільця $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ непросте, що суперечить його выбору. Отримана суперечність показує, що $\mathrm{Ker} D = \mathbb{K}$. Але тоді за Лемою 4 централізатор C скінченновимірний над полем $\mathbb{K}$ і має розмірність $\leq n$.

Твердження 1 доведено.

Теорема 1. *Нехай $\mathbb{K}$ – алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, R – розширення поля $\mathbb{K}$ степеня трансцендентності n над $\mathbb{K}$ і D – $\mathbb{K}$-диференціювання R з полем констант $F = \mathrm{Ker} D$. Якщо $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} F \leq 2$, то централізатор $C = C_{W(R)}(D)$ є або алгеброй Лі над F розмірності $\dim_F C \leq n$, або C містить ідеал $I = \{T \in C \mid T(F) = 0\}$, який є алгеброй Лі над F розмірності $\mathrm{rk}_R C - 1$ за умови, що $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} F = 1$ або $\mathrm{rk}_R C - 2$ за умови, що $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} F = 2$ і такий, що: (1) при умові $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} F = 1$ фактор-алгебра C/I ізоморфна $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}(x)$, (2) при умові $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} F = 2$ фактор-алгебра C/I ізоморфна або підалгебрі ранга 1 з $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} F$, або самій алгебрі $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} F$*

Доведення теореми 1.

Якщо $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} F = 0$, то $F = \mathbb{K}$ і C є алгеброю Лі над $F = \mathbb{K}$ розмірності $\leq n$ за лемою 4. Тому будемо вважати в подальшому, що $1 \leq \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} F \leq 2$. За Лемою 7 для ідеала I алгебри Лі C виконується нерівність $\mathrm{rk}_R C - \mathrm{rk}_R I \leq \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} F \leq 2$. Якщо $\mathrm{rk}_R C = \mathrm{rk}_R I$, то як неважко переконатися, $C = I$ – алгебра Лі над F розмірності $\leq n$ за лемою 4.

Нехай спочатку $\mathrm{rk}_R C - \mathrm{rk}_R I = 1$. Виберемо який-небудь базис $\{D_1, \ldots, D_{k-1}\}$ для I над R і доповнимо його яким–небудь елементом $D_k \in C$ до базиса C над R. Розглянемо два випадки:

Випадок 1. $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} F = 1$. Тоді по теоремі Гордана (див., наприклад, [9], Теорема 3) отримаємо, що $F = \mathbb{K}(\theta)$ для деякого елемента $\theta \in R$. За означенням ідеала I маємо $D_i(\theta) = 0, i = 1, ..., k-1$. Оскільки $F = \mathbb{K}(\theta)$, то $D_k(\theta) = f(\theta)$ для деякої раціональної функції $f(t) \in \mathbb{K}(t)$ и $f(\theta) \neq 0$. Замінюючи елемент D_k на $f(\theta)^{-1} D_k$ (нагадаємо, що

$f(\theta) \in F$) можна відразу вважати, що $D_k(\theta) = 1$. Але тоді, як неважко переконатися, підалгебра FD_k алгебри Лі $Der_{\mathbb{K}}R$ ізоморфна алгебрі Лі $Der_{\mathbb{K}}\mathbb{K}(x)$ всіх $\mathbb{K}$-диференціювань поля раціональних функцій $\mathbb{K}(x)$. Оскільки $C = FD_k \leftthreetimes I$ – напівпряма сума, то $C/I \simeq \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}(x)$.

Випадок 2. $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}}F = 2$. В цьому випадку, як і вище, $C = FD_k \leftthreetimes I$ – напівпряма сума двох алгебр Лі, при цьому FD_k – підалгебра, яка ізоморфна підалгебрі рангу 1 над F із $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}F$.

Нехай тепер $\mathrm{rk}_R C - \mathrm{rk}_R I = 2$. Тоді за лемою 7 $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}}F = 2$. Виберемо довільним чином базисні елементи $D_1, \ldots, D_{k-2}$ для I над R і доповнимо їх якими-небудь елементами S_1, S_2 до базису C над полем R. Позначимо через $\mathbb{K}(y_1, y_2)$ довільне підполе степеня трансцендентностя 2 над $\mathbb{K}$ з F і нехай $S_1(y_1) = f_1, S_2(y_1) = f_2$ для деяких елементів $f_1, f_2 \in F$. Тоді $(f_2S_1 - f_1S_2)(y_1) = 0$ і тому ми можемо відразу вважати, що $S_2(y_1) = 0$. Припустимо, що ще виконується рівність $S_2(y_2) = 0$. Оскільки тоді S_2 містить в своєму ядрі підполе $\mathbb{K}(y_1, y_2)$ з F і поле F є алгебраїчним розширенням поля $\mathbb{K}(y_1, y_2)$, то $S_2(F) = 0$ і тому $S_2 \in I$, що неможливо, бо за вибором $D_1, \ldots, D_{k-2}, S_2$ лінійно незалежні над R. Тому $S_2(y_2) = h_2 \neq 0$ для деякого елемента $h_2 \in F$. Замінюючи S_2 на $h_2^{-1}S_2$ можно вважати, що $S_2(y_2) = 1$. Припустимо, тепер, що $S_1(y_2) = h_1 \neq 0$ для деякого елемента $h_1 \in F$. Замінюючи S_1 на $S_2 - h_1^{-1}S_1$ можна, не втрачаючи загальності, вважати, що $S_1(y_2) = 0$. Аналогічно можна показати, що S_1 можна вибрати так щоб $S_1(y_1) = 1$.

Отже, ми можемо вибрати базис C над I із елементів S_1, S_2 таких, що $S_i(y_j) = \delta_{ij}$, де δ_{ij} – символ Кронекера.

Легко бачити, що $[S_1, S_2](F) = 0$ і тому $[S_1, S_2] \in I$. Розглянемо фактор-алгебру C/I. Кожний елемент алгебри Лі C/I (над полем $\mathbb{K}$) записується у вигляді суми $(f_1S_1 + I) + (f_2S_2 + I)$ для деяких $f_1, f_2 \in F$ і S_1, S_2 індуковані на F з частинних похідних $\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}$ підполя $\mathbb{K}(y_1, y_2)$ (за побудовою елементів S_1, S_2). Тому, як легко бачити, $C/I \simeq \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}F$.

Теорема 1 доведена.

4. Централізатори диференціювань з великими полями констант

Лема 8. *Нехай R – розширення поля $\mathbb{K}$ степеня трансцендентності n над $\mathbb{K}$ і $D \in W(R)$ таке диференціювання поля R, що поле констант*

$F = \mathrm{Ker} D$ *має степінь трансцендентності* $n-1$ *над* $\mathbb{K}$. *Тоді:*

1) існує базис трансцендентності $y_1, \ldots, y_n$ *для* R *над* $\mathbb{K}$ *такий, що* $y_1, \ldots, y_{n-1}$ *– базис трансцендентності для* F *над* $\mathbb{K}$ *і* $D = h\frac{\partial}{\partial y_n}$ *для деякого* $h \in R$;

2) централізатор $C = C_{W(R)}(D)$ *складається з диференціювань поля* R *вигляду* $D_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i \frac{\partial}{\partial y_i}$, *де* $r_i \in R$, $\frac{\partial r_i}{\partial y_n} = 0, i = 1, \ldots, n-1$ *і* $D_1(h) = h\frac{\partial r_n}{\partial y_n}$.

Доведення леми 8.

Виберемо довільний базис трансцендентності $y_1, \ldots, y_{n-1}$ поля F над $\mathbb{K}$ і доповнимо його яким-небудь елементом y_n до базиса трансцендентності R над $\mathbb{K}$. Візьмемо диференціювання $\frac{\partial}{\partial y_n}$ підполя $\mathbb{K}(y_1, \ldots, y_n)$ з R і продовжимо його до диференціювання поля R (збережемо те ж саме позначення $\frac{\partial}{\partial y_n}$). Тоді $\frac{\partial}{\partial y_n}(y_i) = 0, i = 1, \ldots, n-1$. Оскільки F є алгебраїчним розширенням підполя $\mathbb{K}(y_1, \ldots, y_{n-1})$, то тоді, як легко бачити, $\frac{\partial}{\partial y_n}(F) = 0$. Далі, нехай $D(y_n) = h$ для деякого $h \in R$. Тоді $(D - h\frac{\partial}{\partial y_n})(y_n) = 0$ і, оскільки $(D - h\frac{\partial}{\partial y_n})(y_i) = 0$ при $i = 1, \ldots, n-1$, то $D - h\frac{\partial}{\partial y_n} = 0$ на підполі $\mathbb{K}(y_1, \ldots, y_n)$, а, значить, і на полі R. Останнє означає, що $D = h\frac{\partial}{\partial y_n}$.

Візьмемо тепер довільний елемент $D_1 \in C = C_{W(R)}(D)$. За лемою 3 елемент D_1 записується в вигляді $D_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i \frac{\partial}{\partial y_i}$, $r_i \in R$. Із умови

$$[D, D_1] = [h\frac{\partial}{\partial y_n}, \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{\partial}{\partial y_i}] = 0$$

отримаємо, що

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} h\frac{\partial r_i}{\partial y_n}\frac{\partial}{\partial y_i} - (\sum_{i=1}^{n} r_i \frac{\partial h}{\partial y_i})\frac{\partial}{\partial y_n} + h\frac{\partial r_n}{\partial y_n}\frac{\partial}{\partial y_n}.$$

Звідси випливає, що $\frac{\partial r_i}{\partial y_n} = 0, i = 1, \ldots, n-1$ і $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i \frac{\partial h}{\partial y_i} = h\frac{\partial r_n}{\partial y_n}$. Останнє означає, що $D_1(h) = h\frac{\partial r_n}{\partial y_n}$.

Навпаки, нехай

$$D_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{\partial}{\partial y_i}, \text{ де } \frac{\partial r_i}{\partial y_n} = 0, i = 1, \ldots, n-1$$

і $D_1(h) = h\frac{\partial r_n}{\partial y_n}$. Тоді

$$[h\frac{\partial}{\partial y_n}, D_1] = h\frac{\partial r_n}{\partial y_n}\frac{\partial}{\partial y_n} - \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{\partial h}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_n} = 0$$

і $D_1 \in C_{W(R)}(D)$.

Лема 8 доведена.

Лема 9. *Нехай $\mathbb{K}$ – алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, R – розширення поля $\mathbb{K}$, яке має степінь трансцендентності n над $\mathbb{K}$ і F підполе із R, алгебраїчно замкнене в R, яке містить $\mathbb{K}$, степеня трансцендентності $n-1$ над $\mathbb{K}$. Якщо D – $\mathbb{K}$-диференціювання підполя F і $z \in R \setminus F$, то існує і єдине $\mathbb{K}$-диференціювання D_1 поля R таке, що $D_1(z) = 1$, $D_1(F) \subseteq F$ і $D_1|_F = D$.*

Доведення леми 9.

Візьмемо який-небудь базис трансцендентності $y_1, \dots, y_{n-1}$ поля F над $\mathbb{K}$. Оскільки елемент z трансцендентний над F завдяки алгебраїчній замкненості F в R, то $y_1, \dots, y_{n-1}, z$ – базис трансцендентності поля R над $\mathbb{K}$. Продовжимо $\mathbb{K}$-диференціювання $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial z}$ підполя $\mathbb{K}(y_1, \dots, y_{n-1}, z)$ на поле R (зауважимо, що R алгебраїчне над $\mathbb{K}(y_1, \dots, y_{n-1}, z)$ і тому такі продовження існують і єдині), зберігши ті ж самі позначення. Тоді $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}$, які розглядаються як диференціювання поля F утворюють базис векторного простору $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} F$ і тому $D = \sum_{i=1}^{n-1} f_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ для деяких $f_i \in F$. Розглядаючи D як диференціювання поля R візьмемо суму $D_1 = D + \frac{\partial}{\partial z}$. Тоді $D_1(F) \subseteq F$ і $D_1|_F = D$, оскільки $\frac{\partial}{\partial z}(F) = 0$. При цьому, очевидно, $D_1(z) = 1$.

Лема 9 доведена.

Зауваження 3. Диференціювання D_1 поля R, побудоване за диференціюванням D підполя F і елементом $z \in R \setminus F$ будемо називати для зручності продовженням диференціювання D на R вздовж елемента z.

Теорема 2. *Нехай $\mathbb{K}$ – алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, R – розширення поля $\mathbb{K}$, яке має степінь трансцендентності n над $\mathbb{K}$, $D \in W(R)$ таке $\mathbb{K}$-диференціювання поля R, що його поле констант F в R має степінь трансцендентності $n-1$ над $\mathbb{K}$. Якщо для* *деякого елемента $z \in R \setminus F$ виконується $D(z) \in F$, то централізатор $C = C_{W(R)}(D)$ має ранг n над R і складається з диференціювань вигляду $D_2 + (f_0 + D_2(h)z/h)\frac{\partial}{\partial z}$, де D_2 – довільне диференціювання поля F, продовжене до диференціювання поля R вздовж елемента z, і при цьому $h = D(z)$, а $f_0 \in F$ – довільний елемент.*

Доведення теореми 2.

Виберемо який-небудь базис трансцендентності $\{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ підполя F над $\mathbb{K}$. Оскільки $z \in R \setminus F$, $D(z) \in F$ і підполе F алгебраїчно замкнене в R (як ядро диференціювання, див., наприклад, [7]), то $\{y_1, \ldots, y_{n-1}, z\}$ – базис трансцендентності поля R над $\mathbb{K}$. За лемою 8 диференціювання D має вигляд $D = h\frac{\partial}{\partial z}$ для деякого $h \in R$. Але тоді, очевидно, $h = D(z)$ і $h \in F$ за умовою теореми. Візьмемо довільний елемент $D_1 \in C_{W(R)}(D)$ і запишемо його в вигляді

$$D_1 = \sum_{i=1}^{n-1} r_i \frac{\partial}{\partial y_i} + r\frac{\partial}{\partial z}, r_i, r \in R.$$

Із умови $[D, D_1] = 0$ отримаємо, використовуючи лему 8, що $\frac{\partial r_i}{\partial z} = 0, i = 1, \ldots, n-1$ і $D_1(h) = h\frac{\partial r}{\partial z}$. Оскільки, як неважко переконатися, $D_1(F) \subseteq F$, то із останньої рівності випливає, що $\frac{\partial r}{\partial z} \in F$. Із співвідношения $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$ випливає, що $\frac{\partial}{\partial z}(r - \alpha z) = 0$ для деякого $\alpha \in F$. Але тоді $r - \alpha z \in F$ (бо за умовою $KerD = \mathrm{Ker} h\frac{\partial}{\partial z} = F$), тобто $r = \alpha z + f_0$ для деяких $\alpha, f_0 \in F$. Звідси отримаємо

$$D_1 = \sum_{i=1}^{n-1} r_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \alpha z\frac{\partial}{\partial z} + f_0\frac{\partial}{\partial z}.$$

Оскільки

$$[f_0\frac{\partial}{\partial z}, D] = [f_0\frac{\partial}{\partial z}, h\frac{\partial}{\partial z}] = 0,$$

то елемент $D_1' = \sum\limits_{i=1}^{n-1} r_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \alpha z\frac{\partial}{\partial z}$ належить централізатору $C = C_{W(R)}(D)$. Тоді із співвідношення $[D, D_1'] = 0$ випливає, що

$$[\alpha z\frac{\partial}{\partial z}, D] = [D, \sum_{i=1}^{n-1} r_i \frac{\partial}{\partial y_i}],$$

тобто

$$[\alpha z\frac{\partial}{\partial z}, h\frac{\partial}{\partial z}] = [h\frac{\partial}{\partial z}, \sum_{i=1}^{n-1} r_i\frac{\partial}{\partial y_i}],$$

де $\alpha, h \in F$. Зауважимо далі, що

$$[\alpha z\frac{\partial}{\partial z}, h\frac{\partial}{\partial z}] = -\alpha h\frac{\partial}{\partial z},$$

$$[h\frac{\partial}{\partial z}, \sum_{i=1}^{n-1} r_i\frac{\partial}{\partial y_i}] = -(\sum_{i=1}^{n-1} r_i\frac{\partial h}{\partial y_i})\frac{\partial}{\partial z}.$$

Звідси отримаємо, що $\sum\limits_{i=1}^{n-1} r_i\frac{\partial h}{\partial y_i} = \alpha h$. Позначимо $D_2 = \sum\limits_{i=1}^{n-1} r_i\frac{\partial}{\partial y_i}$. Тоді останнє співвідношення записується у вигляді $D_2(h) = \alpha h$. Оскільки $D \neq 0$, то $h \neq 0$ і звідси знайдемо $\alpha = D_2(h)/h$. Тоді диференціювання D_1 із централізатора C (нагадаємо, що D_1 вибиралось довільно) має вигляд $D_1 = D_2 + (f_0 + D_2(h)z/h)\frac{\partial}{\partial z}$, де D_2 розглядається як диференціювання поля R (а не тільки F) в базисі трансцендентності $y_1, \ldots, y_{n-1}, z$ поля R над $\mathbb{K}$.

Навпаки, якщо ми візьмемо довільне диференціювання D_2 підполя F і розглянемо продовження диференціювання D_2 на R вздовж z вигляду $D_1 = D_2 + (f_0 + D_2(h)z/h)\frac{\partial}{\partial z}$, де f_0 – довільний елемент із F, то, як неважко переконатися, $[D_1, D] = 0$. Теорема 2 доведена.

5. Висновки

В роботі досліджено будову централізаторів диференціювань в алгебрі Лі всіх диференціювань поля алгебраїчних функцій від кількох змінних, тобто алгебраїчного розширення поля раціональних функцій від кількох змінних. У випадку, коли диференціювання має поле констант малого степеня трансцендентності над основним полем, або це поле констант має степінь трансцендентності на одиницю меншу ніж кількість змінних, дано характеризацію централізатора такого елемента, зокрема вказано його ранг над полем алгебраїчних функцій.

Література

[1] *G.M.Benkart, I.M.Isaacs.* Lie algebras with nilpotent centralizers // Can. J. Math., v.31, no.5 (1979), 929–941.

[2] *D.A. Jordan.* On the ideals of a Lie algebra of derivations // J. London Math. Soc. (2) 33 (1986), no. 1, 33–39.

[3] *I.Klep, P.Moravec.* Lie algebras with abelian centralizers // Algebra Colloquim, v.17, no.4 (2010), 629–636.

[4] *S. Lie.* Theorie der Transformationsgruppen // Vol. 3, Leipzig, 1893.

[5] *Ie.O.Makedonskiy, A.P.Petravchuk and V.V.Stepukh.* On centralizers of elements in the Lie algebra $W_2(K)$ // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова, вип. 14, 2013, с. 24-30.

[6] *Ie. O. Makedonskyi and A.P. Petravchuk.* On nilpotent and solvable Lie algebras of derivations // Journal of Algebra, 401 (2014), 245-257.

[7] *A.Nowicki and M.Nagata.* Rings of constants for k-derivations in $k[x_1, \ldots, x_n]$ // J. Math. Kyoto Univ.– 1988. – v. 28, no.1, 111–118.

[8] *A.P.Petravchuk, O.G.Iena.* On centralizers of elements in the Lie algebra of the special Cremona group $sa(2, k)$ // Journal of Lie Theory, 16, (2006). no. 3, 561–567.

[9] *A. Schinzel.* Polynomials with Special Regard to Reducibility // Cambridge Univ. Press, 2000.