

Зважене гасіння обмежених збурень у системі керування літака в режимі посадки^{*}

О. Г. Мазко, С. М. Кусій

Інститут математики НАН України, Київ;
mazko@imath.kiev.ua, sergii.kusii@gmail.com

A linear model of the aircraft control system in the landing mode is considered in the presence of limited external perturbations. The method of linear matrix inequalities is implemented in the generalized H_∞ -optimization problem in order to evaluate and reduce the influence of external and initial disturbances on qualitative characteristics of the system. In particular, influence of weight coefficients of the generalized quality criteria on the stability factor and the transient process time of a closed system have been investigated.

Розглянуто лінійну модель системи керування літака в режимі посадки за наявності обмежених зовнішніх збурень. Реалізовано методику лінійних матричних нерівностей у узагальненій задачі H_∞ -оптимізації з метою оцінки й пониження впливу зовнішніх і початкових збурень на якісні характеристики системи. Зокрема, досліджено вплив вагових коефіцієнтів узагальнених критеріїв якості на запас стійкості й час перехідного процесу замкненої системи.

1 Вступ

При моделюванні сучасних систем керування складними об'єктами необхідно враховувати невизначені елементи (параметри, зовнішні збурення, неточності вимірювальних приладів тощо). Для таких об'єктів першочерговими є задачі побудови статичних або динамічних регуляторів, що забезпечують робастну стійкість станів рівноваги й пониження впливу зовнішніх збурень на динаміку керованих об'єктів. Ці задачі можуть бути розв'язані методами теорії H_∞ -оптимізації або

^{*}Робота виконана за частковою підтримкою НДР № 0117U004077.

методами інваріантних еліпсоїдів із залученням апарату лінійних матричних нерівностей (ЛМН) (див., наприклад, [1, 8]). Для цього створені достатньо ефективні засоби LMI Toolbox комп'ютерної системи Matlab [9].

Мірою впливу збурень, обмежених за L_2 -нормою, на динаміку лінійних об'єктів із нульовим початковим вектором є максимальне значення відношення L_2 -норм векторів керованого виходу і входу (збурень), яке збігається з H_∞ -нормою матричної передатної функції системи [1]. В [6, 10, 11] використовувалися загальніші критерії якості, які враховують також вплив початкових збурень, обумовлених початковим вектором. Введення вагових коефіцієнтів у узагальнених критеріях якості дає можливість встановити пріоритети між компонентами виходу, зовнішніх і початкових збурень.

У даній роботі викладено деякі результати попередніх досліджень авторів, присвячених розробці методів зваженої H_∞ -оптимізації систем керування, і їхнього застосування в задачі мінімізації зваженого рівня впливу зовнішніх і початкових збурень у системі керування літака на режимі посадки.

Використовуватимемо такі позначення:

- I_n — одинична матриця порядку n ;
- $0_{n \times m}$ — нульова матриця розмірів $n \times m$;
- $X = X^T > 0$ (≥ 0) — додатно (невід'ємно) визначена матриця X ;
- W_A — матриця, стовпці якої утворюють базис ядра матриці A ;
- $\|x\|$ — евклідова норма вектора x ;
- $\|x\|_Q$ — зважена L_2 -норма вектор-функції $x(t)$.

2 Лінійна модель системи керування літака з керованим і спостережуваним виходами

Поздовжній рух керованого літального апарата з урахуванням зовнішніх (вітрових) збурень описується лінійною системою [12]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u, & x(0) &= x_0, \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u, \end{aligned} \quad (1)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів, а всі матричні коефіцієнти відповідних розмірів сталі. Тут

$$n = 6, \quad m = 2, \quad s = 5, \quad k = 4, \quad l = 2,$$

а компоненти відповідних векторів такі:

- x_1 — відхилення повітряної швидкості літака;
- x_2 — відхилення кута нахилу траєкторії у повітряній системі координат;
- x_3 — відхилення кутової швидкості стосовно осі z ;
- x_4 — відхилення кута тангажа;
- x_5 — відхилення висоти польоту літака;
- x_6 — відхилення сили тяги двигунів, напрям якої збігається з продовженням віссю літака;
- u_1 — керування, що формує відхилення руля висоти;
- u_2 — відхилення сектора газу від заданого значення;
- w_1 — вертикальна складова швидкості вітру;
- w_2 і w_3 — відповідно горизонтальна і вертикальна складові прискорення вітру;
- w_4 і w_5 — похибки вимірювання компонент вектора y , що забезпечує зворотний зв'язок у системі керування.

Вектори керованого і спостережуваного виходів мають вигляд

$$z = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} x_1 + w_4 \\ x_5 + w_5 \end{bmatrix}.$$

Керування у системі (1) шукатимемо у вигляді динамічного регулятора порядку $r \leq n$ з нульовим початковим вектором:

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \quad \xi(0) = 0, \quad (2)$$

де $\xi \in \mathbb{R}^r$ — вектор стану регулятора, Z , V , U і K — невідомі матриці відповідних розмірів $r \times r$, $r \times l$, $m \times r$ і $m \times l$. Основна функція регулятора — підтримувати робастну стійкість і задані значення висоти польоту й повітряної швидкості літака за наявності обмежених невизначених зовнішніх і початкових збурень.

3 Оцінка зважених критеріїв якості

За умови $\det(I_m - KD_{22}) \neq 0$ замкнена система (1), (2) набуває вигляду

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}_* \hat{x} + \hat{B}_* w, \quad z = \hat{C}_* \hat{x} + \hat{D}_* w, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_* = \begin{bmatrix} A + B_2 K_0 C_2 & B_2 U_0 \\ V_0 C_2 & Z_0 \end{bmatrix} = \hat{A} + \hat{B}_2 \hat{K}_0 \hat{C}_2, \\ \hat{B}_* &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2 K_0 D_{21} \\ V_0 D_{21} \end{bmatrix} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \hat{K}_0 \hat{D}_{21}, \\ \hat{C}_* &= [C_1 + D_{12} K_0 C_2, D_{12} U_0] = \hat{C}_1 + \hat{D}_{12} \hat{K}_0 \hat{C}_2, \\ \hat{D}_* &= D_{11} + D_{12} K_0 D_{21} = D_{11} + \hat{D}_{12} \hat{K}_0 \hat{D}_{21}, \\ \hat{A} &= \begin{bmatrix} A & 0_{n \times r} \\ 0_{r \times n} & 0_{r \times r} \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0_{n \times r} \\ 0_{r \times m} & I_r \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0_{l \times r} \\ 0_{r \times n} & I_r \end{bmatrix}, \\ \hat{K}_0 &= \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{r \times s} \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_{21} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0_{r \times s} \end{bmatrix}, \\ \hat{C}_1 &= [C_1, 0_{k \times r}], \quad \hat{D}_{12} = [D_{12}, 0_{k \times r}].\end{aligned}$$

Тут невідомими є блоки матриці $\hat{K}_0$

$$K_0 = (I_m - K D_{22})^{-1} K, \quad U_0 = (I_m - K D_{22})^{-1} U,$$

$$V_0 = V(I_l - D_{22} K)^{-1}, \quad Z_0 = Z + V D_{22} (I_m - K D_{22})^{-1} U,$$

які однозначно визначають шукані матриці регулятора (2):

$$\begin{aligned}K &= (I_m + K_0 D_{22})^{-1} K_0, \quad U = (I_m + K_0 D_{22})^{-1} U_0, \\ V &= V_0 (I_l + D_{22} K_0)^{-1}, \quad Z = Z_0 - V_0 D_{22} (I_m + K_0 D_{22})^{-1} U_0.\end{aligned}\quad (4)$$

Введемо критерії якості для замкненої системи (3):

$$J_0 = \sup_{0 < \|w\|_P < \infty} \varphi_0(w), \quad \varphi_0(w) = \frac{\|z\|_Q}{\|w\|_P}, \quad (5)$$

$$J = \sup_{0 < \|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 < \infty} \varphi(w, x_0), \quad \varphi(w, x_0) = \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}}, \quad (6)$$

де

$$\|z\|_Q^2 = \int_0^\infty z^\top Q z \, dt, \quad \|w\|_P^2 = \int_0^\infty w^\top P w \, dt,$$

$Q = Q^\top > 0$, $P = P^\top > 0$ і $X_0 = X_0^\top > 0$ — задані матриці.

Значення J_0 у випадку одиничних матриць $P = I_s$ і $Q = I_k$ збігається з H_∞ -нормою матричної передатної функції системи

$$\|H\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{\lambda_{\max}(H^\top(-i\omega)H(i\omega))}, H(\lambda) = \hat{C}_*(\lambda I_n - \hat{A}_*)^{-1}\hat{B}_* + \hat{D}_*,$$

яка характеризує рівень гасіння енергії вхідних сигналів w при їхньому проходженні через систему. Значення J характеризує зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень у системі (3). Даний критерій якості використовувався у випадку $P = I_s$, $Q = I_k$ і $X_0 = \rho^2 I_n$ (6). Очевидно, що $J_0 \leq J$, оскільки $\varphi(w, 0) = \varphi_0(w)$, тобто J_0 і J при $x_0 = 0$ збігаються. Якщо система (3) неекспансивна, тобто її вектор виходу при довільному $T > 0$ задовольняє нерівність

$$\int_0^T z^\top Q z dt \leq \int_0^T w^\top P w dt + x_0^\top X_0 x_0,$$

то $J \leq 1$. Зворотне твердження для лінійної системи також виконується.

Статичні й динамічні регулятори, які мінімізують критерій якості J , називатимемо *J-оптимальними*. J_0 -оптимальне керування у випадку одиничних вагових матриць функціоналу $\varphi_0(w) \in H_\infty$ -оптимальним.

Позначимо блочні матриці $R = [C_2, D_{21}]$ і $L = [B_2^\top, D_{12}^\top]$.

Теорема 3.1. (11) Для системи (1) існує динамічний регулятор (2), що забезпечує оцінку $J < \gamma$ ($J_0 < \gamma$), тоді і лише тоді, коли система співвідношень

$$W_R^\top \begin{bmatrix} A^\top X + XA + C_1^\top Q C_1 & XB_1 + C_1^\top Q D_{11} \\ B_1^\top X + D_{11}^\top Q C_1 & D_{11}^\top Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \quad (7)$$

$$W_L^\top \begin{bmatrix} AY + YA^\top + B_1 P^{-1} B_1^\top & Y C_1^\top + B_1 P^{-1} D_{11}^\top \\ C_1 Y + D_{11} P^{-1} B_1^\top & D_{11} P^{-1} D_{11}^\top - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \quad (8)$$

$$W = \begin{bmatrix} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{rank } W \leq n + r, \quad (9)$$

$$0 < X < \gamma^2 X_0 \quad (10)$$

((7), (8) і (9)) сумісна стосовно матриць $X = X^\top > 0$ і $Y = Y^\top > 0$. При цьому замкнена система (3) з невизначеністю

$$w = \gamma^{-1} \Theta z, \quad \Theta^\top P \Theta \leq Q, \quad (11)$$

робастно стійка і має спільну квадратичну функцію Ляпунова $v(\hat{x}) = \hat{x}^\top \hat{X} \hat{x}$, де $\hat{X}$ — розв'язок ЛМН

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_*^\top \hat{X} + \hat{X} \hat{A}_* + \hat{C}_*^\top Q \hat{C}_* & \hat{X} \hat{B}_* + \hat{C}_*^\top Q \hat{D}_* \\ \hat{B}_*^\top \hat{X} + \hat{D}_*^\top Q \hat{C}_* & \hat{D}_*^\top Q \hat{D}_* - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0. \quad (12)$$

4 Побудова найгіршого вектора зовнішніх збурень

Наведемо методику знаходження так званого найгіршого збурення w у замкненій системі (3). Для спрощення подальших виразів замість (3) розглянемо лінійну систему

$$\dot{x} = Ax + Bw, \quad z = Cx + Dw, \quad x(0) = x_0, \quad (13)$$

а також її характеристики J_0 і J , означені у (5) і (6) відповідно.

Лема 4.1. [11] Нехай матриця A гурвіцева. Тоді оцінка $J_0 < \gamma$ виконується в тому і лише в тому випадку, коли ЛМН

$$\Phi_\gamma = \begin{bmatrix} A^\top X + XA + C^\top QC & XB + C^\top QD \\ B^\top X + D^\top QC & D^\top QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

має розв'язок $X = X^\top > 0$. Для виконання оцінки $J < \gamma$ необхідно і достатньо, щоб була сумісною система ЛМН (10) і (14).

За лемою Шура [13] співвідношення (14) еквівалентне матричній нерівності Ріккати

$$A_1^\top X + XA_1 + XR_1X + Q_1 < 0, \quad (15)$$

де $A_1 = A + BR^{-1}D^\top QC$, $Q_1 = C^\top(Q + QDR^{-1}D^\top Q)C$, $R_1 = BR^{-1}B^\top$ і $R = \gamma^2 P - D^\top QD > 0$. При цьому виконується нерівність

$$\dot{v}(x) + z^\top Qz - \gamma^2 w^\top Pw = [x^\top, w^\top] \Phi_\gamma \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \leq 0,$$

де $\dot{v}(x)$ — похідна функції $v(x)$ в силу системи (13). Якщо пара матриць (A, B) керована, пара матриць (A, C) спостережувана і $J_0 < \gamma$, то відповідне матричне рівняння Ріккати

$$A_1^\top S + SA_1 + SR_1S + Q_1 = 0 \quad (16)$$

має розв'язки S_- і S_+ , при яких спектр $\sigma(A_1 + R_1 S_{\pm}) \subset \mathbb{C}^{\pm}$, $0 < S_- < S_+$ і кожний розв'язок нерівності (15) належить матричному інтервалу $S_- < X < S_+$ (див. [2, 3] і доведення необхідності леми 4.1 [11]). Крім того, якщо $J < \gamma$ і S є розв'язком рівняння (16), то $S < \gamma^2 X_0$. Так, для функції $v(x) = x^{\top} S x$ і вектора збурень

$$w = K_0 x, \quad K_0 = R^{-1}(B^{\top} S + D^{\top} Q C) \quad (17)$$

отримаємо рівність $\dot{v}(x) + z^{\top} Q z - \gamma^2 w^{\top} P w = 0$. Після інтегрування даної рівності на інтервалі $[0, \infty)$ отримаємо $\|z\|_Q^2 - \gamma^2 \|w\|_P^2 = x_0^{\top} S x_0 < \gamma^2 x_0^{\top} X_0 x_0$ для будь-якого початкового вектора $x_0 \neq 0$. Інакше $\varphi(w, x_0) \geq \gamma$ для деякого x_0 , тобто $J \geq \gamma$.

Вираз (17), що відповідає *стабілізуючому* розв'язкові $S = S_-$ рівняння Ріккати (16), є *найгіршим* збуренням у системі (13). Можна встановити, що вектор (17) належить множині збурень (11), якщо сумісна щодо Θ система співвідношень $\Theta(C + D K_0) = \gamma K_0$ і $\Theta^{\top} P \Theta \leq Q$.

5 Алгоритм побудови динамічного регулятора

На основі теореми 3.1 наведемо алгоритм побудови динамічного регулятора [2], який забезпечує задані оцінки критеріїв якості $J_0 < \gamma$ і $J < \gamma$ замкненої системи [3].

Алгоритм 5.1. 1) обчислення матриць W_R і W_L , де $R = [C_2, D_{21}]$, $L = [B_2^{\top}, D_{12}^{\top}]$;

2) знаходження матриць $X = X^{\top} > 0$ і $Y = Y^{\top} > 0$, які задовольняють систему співвідношень (7) – (10);

3) побудова розкладу $Z = Y - \gamma^2 X^{-1} = V^{\top} V$, де $V \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $\ker V = \ker Z$, і формування блочної матриці

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^{\top} \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad X_1 = \frac{1}{\gamma} V X, \quad X_2 = \frac{1}{\gamma^2} V X V^{\top} + I_r;$$

4) розв'язування ЛМН $\hat{L}^{\top} \hat{K}_0 \hat{R} + \hat{R}^{\top} \hat{K}_0^{\top} \hat{L} + \hat{\Omega} < 0$ стосовно $\hat{K}_0$ при обмеженні $\det(I_m - K D_{22}) \neq 0$, де

$$\hat{R} = [\hat{C}_2, \hat{D}_{21}, 0_{l+r \times k}], \quad \hat{L} = [\hat{B}_2^{\top}, \hat{D}_{12}^{\top}, 0_{m+r \times s}] \tilde{X},$$

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \hat{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \hat{A}^{\top} \hat{X} + \hat{X} \hat{A} & \hat{X} \hat{B}_1 & \hat{C}_1^{\top} \\ \hat{B}_1^{\top} \hat{X} & -\gamma^2 P & D_{11}^{\top} \\ \hat{C}_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix};$$

5) обчислення матриць регулятора [2] за формулами [4].

Для забезпечення оцінки $J_0 < \gamma$ додаткове обмеження [10] у п. 2 даного алгоритму не використовується. При визначенні матриць X і Y у випадку динамічного регулятора повного порядку $r = n$ рангова умова в [9] виконується автоматично і необхідно розв'язати відповідну систему ЛМН без обмежень.

Зазначимо, що для побудови наближених J -оптимальних законів керування для наведених класів систем можуть бути застосовані твердження теореми [3.1] при мінімально можливих значеннях параметра γ .

6 Зважене гасіння зовнішніх збурень руху літака по траєкторії глісади

Розглянемо задачу керування повздовжнім рухом літака в умовах невизначених вітрових збурень і шумів вимірів. Вітрові збурення призводять до відхилення повітряної швидкості й висоти польоту від заданих значень, які визначаються глісадою — траєкторією зниження літака. Лінеаризовані рівняння руху літака ТУ-154 за траєкторією глісади (пряма лінія з заданим кутом нахилу траєкторії $\alpha = -2,7^\circ$) описується у вигляді [1] із такими матричними коефіцієнтами [14]:

$$A = \begin{bmatrix} -0,0608 & -0,0841 & 0 & -0,0869 & 0 & 0,0904 \\ 0,2187 & -0,6218 & 0,10815 & 0,72345 & 0 & 0,0036 \\ 0,0053 & 0,5221 & -1,59015 & -1,55495 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0471 & 1,2437 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,4000 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0,9989 & 0,0471 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0378 & -0,8019 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,1236 & 0 \\ 1,1804 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} D_{11} = 0_{4 \times 5}, \\ D_{22} = 0_{2 \times 2}. \end{matrix}$$

Основною задачею системи керування є підтримка заданої швидкості $v = 71,375$ м/с й висоти польоту при дії зовнішніх збурень (зсуву вітру).

Таблиця 1. Результати розрахунків.

№	p_1	p_2	q_1	q_2	γ	J	J_0	α	T
1	1,0	1,0	1,0	1,0	12,02	12,01782	11,66260	0,20709	118,02
2	1,0	0,1	1,0	1,0	13,19	13,18604	12,56592	0,19797	93,32
3	0,1	1,0	1,0	1,0	33,72	33,71460	33,71460	0,40264	345,28
4	1,0	1,0	1,0	0,1	7,67	7,66113	6,58203	0,37471	23,25
5	1,0	1,0	0,1	1,0	9,62	9,61304	9,61304	0,17020	934,29
6	1,0	0,1	1,0	0,1	9,31	9,30664	8,22266	0,34894	25,08
7	1,0	0,1	0,1	1,0	9,62	9,61304	9,61304	0,19085	675,51
8	0,1	1,0	0,1	1,0	30,41	30,40161	30,40161	0,21168	1438,33
9	0,1	1,0	1,0	0,1	13,02	13,01147	12,99438	0,40884	44,52
10	0,1	0,1	0,1	1,0	30,41	30,40405	30,40405	0,22877	1456,56
11	0,1	0,1	1,0	0,1	14,11	14,10522	14,10034	0,39938	35,79
12	0,1	1,0	0,1	0,1	10,67	10,66528	10,66528	0,40259	232,83
13	1,0	0,1	0,1	0,1	4,17	4,16992	3,96973	0,19963	87,15
14	0,1	0,1	0,1	0,1	10,69	10,68604	10,68604	0,41369	181,94
15	0,1	0,1	1,0	1,0	33,78	33,77808	33,77808	0,38998	326,167
16	1,0	1,0	0,1	0,1	3,81	3,80127	3,68652	0,20830	104,362

За допомогою алгоритму (5.1) проведено ряд чисельних експериментів для побудови наближених J -оптимальних керувань у вигляді динамічного регулятора за виходом (2). При цьому вагові матриці критерію якості (6) мали діагональну структуру:

$$P = \text{diag}\{p_1, p_1, p_1, p_2, p_2\}, \quad Q = \text{diag}\{q_1, q_1, q_2, q_2\}.$$

$$X_0 = \text{diag}\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_6\}.$$

Значення діагональних елементів $\chi_1 = \chi_5 = 1$ вагової матриці X_0 , які характеризують вплив початкових відхилень повітряної швидкості x_1 і висоти польоту x_5 літака, вибрано більшими порівняно з іншими $\chi_2 = \chi_3 = \chi_4 = \chi_6 = 0,1$.

У табл. 1 наведено значення параметра γ , оптимальних критеріїв якості J і J_0 , запасу стійкості $\alpha = -\max\{\text{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\hat{A}_*)\}$ і часу перехідного процесу T замкненої системи при вибраних значеннях p_i

й q_i ($i = 1, 2$). Остання характеристика наближено обчислювалась за формулою $T = \min \{ \tau : \|x(t)\| \leq \varepsilon, t \geq \tau \}$, де $\varepsilon = 0,05$.

Для експерименту під номером 4 побудовано графіки поведінки розв'язків замкненої системи під дією найгіршого збурення, знайденого за допомогою співвідношень (16) і (17) (рис. 1 і 2), а також графіки залежності функціоналу якості J і часу перехідного процесу T від коефіцієнтів вагових матриць (рис. 3–6). Матриці отриманого J -оптимального динамічного регулятора (2):

$$K = \begin{bmatrix} 1,87099 & -19,61947 \\ -0,26827 & -2,17133 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0,46063 & -4,30556 \\ -6,57525 & 0,02899 \\ 1,00386 & -5,22558 \\ -0,09272 & 0,51747 \\ 0,16926 & -2,12938 \\ 0,16560 & -0,87353 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 8,34464 & 1,72886 & -25,35112 & -5,75243 & 32,95934 & -10,49373 \\ 0,75589 & 1,85505 & -2,50665 & -1,83513 & 3,58606 & -1,31451 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} -28,70496 & 0,64242 & -5,09924 & -1,29327 & 7,46573 & -2,11973 \\ -0,48567 & -3,23557 & 0,49326 & -5,61372 & -0,61742 & -2,88923 \\ 3,40179 & 0,62057 & -7,10195 & -1,63963 & 11,13945 & -3,02151 \\ -0,15322 & 0,09184 & 0,72038 & -0,44003 & -0,52193 & -0,52194 \\ 0,73872 & 0,19779 & -2,83179 & -0,42840 & 2,07320 & 0,64161 \\ 0,46314 & 0,10791 & -1,19824 & -0,07926 & 0,84918 & -1,00330 \end{bmatrix}.$$

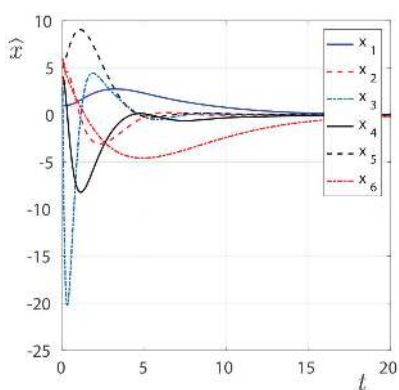


Рис 1. Поведінка замкненої системи.

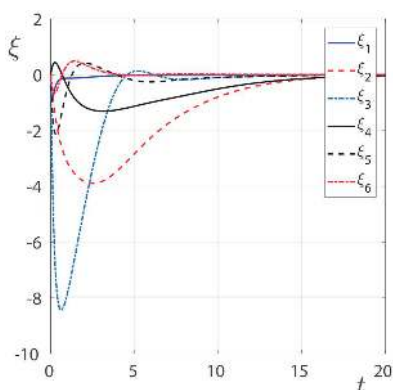
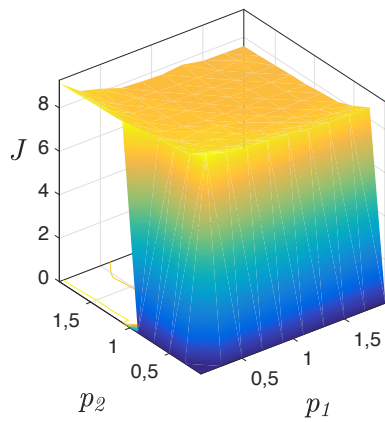
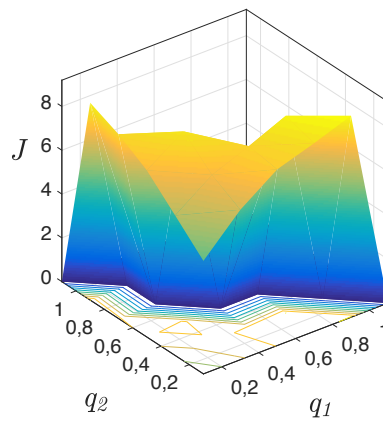
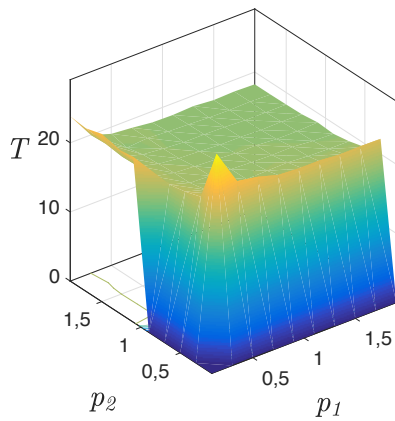
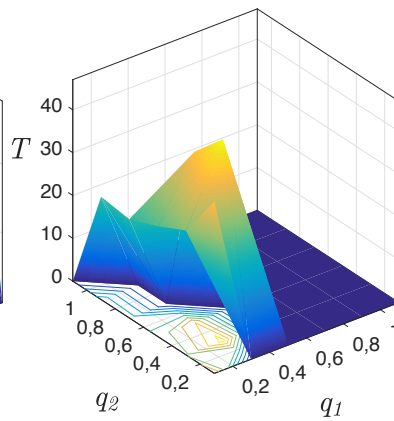


Рис 2. Поведінка динамічного регулятора.

Рис 3. Залежність J від p_1 і p_2 .Рис 4. Залежність J від q_1 і q_2 .Рис 5. Залежність T від p_1 і p_2 .Рис 6. Залежність T від q_1 і q_2 .

- [1] Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
- [2] Zhou K., Doyle J. C., Glover K. Robust and optimal control. — Englewood: Prentice-Hall, Inc., 1996. — 586 p.
- [3] Dullerud G. E., Paganini F. G. A Course in Robust Control Theory. A Convex Approach. — Berlin: Springer-Verlag, 2000. — 419 p.

- [4] *Gahinet P., Apkarian P.* A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control // Intern. J. of Robust and Nonlinear Control. — 1994. — **4**. — P. 421–448.
- [5] *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: Физматлит, 2007. — 280 с.
- [6] *Баландин Д. В., Коган М. М.* Обобщенное H_∞ -оптимальное управление как компромисс между H_∞ -оптимальным и γ -оптимальным управлениями // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 6. — С. 20–38.
- [7] *Ларин В. Б., Туник А. А.* О компенсации внешних возмущений динамической обратной связью по выходной переменной // Прикладная механика. — 2006. — **42**, 5. — С. 132–144.
- [8] *Назин С. А., Поляк Б. Т., Топунов М. В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 3. — С. 106–125.
- [9] *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A. J., Chilali M.* The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide. — Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995. — 138 p.
- [10] *Мазко А. Г.* Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств // Праці Інституту математики НАН України. — Київ, 2016. — **102**. — 332 с.
- [11] *Мазко О. Г., Кусій С. М.* Робастна стабілізація та гасіння зовнішніх збурень у системах з керованими і спостережуваними виходами: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — **13**, 3. — С. 129–145.
- [12] *Курдюков А. П., Тимин В. Н.* Синтез робастной системы управления на режиме посадки самолёта в условиях сдвига ветра // Техническая кибернетика. — 1993, № 6. — С. 100–108.
- [13] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
- [14] *Чайковский М. М., Курдюков А. П., Тимин В. Н.* Построение H_∞ -субоптимального регулятора для управления самолётом на режиме посадки с помощью пакета LMI Control Toolbox // Труды II Всероссийской научной конференции “Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB”. — М.: ИПУ РАН, 2004. — С. 1191–1206.