Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 124–147

УДК 517.9:519.46

Груповий аналіз загального еволюційного рівняння другого порядку: інваріантність відносно груп локальних перетворень з нетривіальним розкладом Леві

Р.З. ЖДАНОВ [†], ***В.І. ЛАГНО*** [‡]

[†] *Інститут математики НАН України, Київ*
E-mail: renat@imath.kiev.ua

[‡] *Полтавський держ. пед. університет ім. В.Г. Короленка*
E-mail: lvi@pdpu.poltava.ua

В статті розглядається задача групової класифікації загального рівняння еволюційного типу другого порядку. Отримано повний перелік рівнянь цього типу, групи локальних перетворень яких мають нетривіальний розклад Леві.

In this article we consider the problem of group classification of general second-order evolution equation. We find the complete list of such equations whose groups of local transformations have nontrivial Levi decomposition.

1. Вступ. Об'єктом наших досліджень є рівняння, що належать до класу рівнянь еволюційного типу

$$u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx}). \tag{1}$$

В (1) і далі $u = u(t, x)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, функція F – довільна гладка функція.

Слід відзначити, що рівняння вигляду (1) займають одне з чільних місць серед фундаментальних рівнянь сучасного природознавства. До рівнянь цього типу приводять задачі опису процесів тепло– і масообміну, механіки суцільного середовища, росту популяцій, фізики моря (для опису розподілу коливань температури і солоності моря відносно глибини) і т.п.

Одним із універсальних методів дослідження диференціальних рівнянь сучасної математичної фізики є їх груповий аналіз, основні поняття і факти якого можна знайти, наприклад, в [1–4]. Але, ефективність застосування цього методу безпосередньо пов'язана із наявністю у досліджуваного рівняння нетривіальних групових властивостей. У зв'язку із цим важливою постає задача групової класифікації диференціальних рівнянь, яка для рівняння (1) звучить так: описати всі рівняння даного вигляду, що мають нетривіальні симетрійні властивості.

Першим систематично досліджував симетрійні властивості рівнянь вигляду (1) ще Софус Лі [5]. Сучасну постановку задачі групової класифікації диференціальних рівнянь здійснив Л.В. Овсянніков у відомій статті [6], де він запропонував метод (Лі–Овсяннікова) розв'язування задачі групової класифікації і здійснив групову класифікацію нелінійного рівняння теплопровідності. Ця стаття поклала початок численним циклам робіт з групової класифікації диференціальних рівнянь взагалі і диференціальних рівнянь вигляду (1), зокрема. Досить повний аналіз результатів робіт, присвячених груповій класифікації диференціальних рівнянь, станом на початок 90-х років минулого століття можна знайти в [7]. Виділимо лише роботи [8–20], в яких було здійснено групову класифікацію рівнянь вигляду (1). Слід відзначити, що в цих роботах для групової класифікації досліджуваних рівнянь було використано метод Лі–Овсяннікова, оскільки всі вони містили довільні функції однієї змінної.

Подальшого прогресу у розв'язуванні задачі групової класифікації нелінійних диференціальних рівнянь вигляду (1) було досягнуто в роботах [21, 22], де запропоновано новий підхід до групової класифікації диференціальних рівнянь і проведено групову класифікацію рівнянь

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} + f(t, x, u, u_x),\\
&u_t = f(t, x, u, u_x)u_{xx} + g(t, x, u, u_x),
\end{aligned}
$$

та в роботах [23–25], де, відповідно, проведено груповий аналіз рівняння Шрьодінгера, еволюційного рівняння третього порядку й хвильового рівняння.

Ми, слідуючи роботам [21, 22], розв'язуємо задачу групової класифікації найбільш загального еволюційного рівняння другого порядку в двовимірному просторі-часі. Оскільки групова класифікація лінійних рівнянь вигляду (1) є добре вивченою, розглядається *задача групової класифікації нелінійних рівнянь вигляду* (1), а саме, тут ми здійснюємо опис тих рівнянь, які допускають групи локальних перетворень з нетривіальним розкладом Леві та є нееквівалентними лінійним рівнянням.

2. Попередній симетрійний аналіз нелінійного еволюційного рівняння. Згідно з відомим алгоритмом Лі [1–4], група локальних перетворень, яку може допускати рівняння вигляду (1), генерується інфінітезимальними операторами вигляду

$$\mathrm{v} = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u, \tag{2}$$

де $\tau = \tau(t,x,u)$, $\xi = \xi(t,x,u)$, $\eta = \eta(t,x,u)$ – довільні дійсні гладкі функції, визначені в просторі $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ незалежних $\mathbb{R}^2 = \langle t, x\rangle$ та залежної $\mathbb{R}^1 = \langle u\rangle$ змінних. Умова інваріантності рівняння (1) відносно оператора (2) має вигляд

$$\varphi^t - \tau F_t - \xi F_x - \eta F_u - \varphi^x F_{u_x} - \varphi^{xx} F_{u_{xx}}\Big|_{(1)} = 0, \tag{3}$$

де

$$\begin{aligned}
&\varphi^t = D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi),\\
&\varphi^x = D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi),\\
&\varphi^{xx} = D_x(\varphi^x) - u_{tx} D_x(\tau) - u_{xx} D_x(\xi),\\
&D_t = \partial_t + u_t\partial_u + u_{tt}\partial_{u_t} + u_{tx}\partial_{u_x} + \cdots,\\
&D_x = \partial_x + u_x\partial_u + u_{tx}\partial_{u_t} + u_{xx}\partial_{u_x} + \cdots,
\end{aligned}$$

умова $\Big|_{(1)}$ в (3) означає заміну u_t у виразах для φ^t, φ^x, φ^{xx} на F.

Провівши стандартний аналіз співвідношення (3), переконуємося у справедливості такого твердження.

Твердження 1. *Група інваріантності рівняння* (1) *генерується інфінітезимальними операторами вигляду*

$$\mathrm{v} = \tau(t)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u, \tag{4}$$

де функції τ, ξ, η та функція F в рівнянні (1) *задовольняють таку рівність:*

$$\begin{aligned}
&\eta_t - u_x\xi_t + (\eta_u - \tau_t - u_x\xi_u)F =\\
&\quad = [\eta_x + u_x(\eta_u - \xi_x) - u_x^2\xi_u]F_{u_x} +
\end{aligned}$$

$$+ [\eta_{xx} + u_x(2\eta_{xu} - \xi_{xx}) + u_x^2(\eta_{uu} - 2\xi_{xu}) - u_x^3\xi_{uu} + \\ + u_{xx}(\eta_u - 2\xi_x) - 3u_x u_{xx}\xi_u]F_{u_{xx}} + \tau F_t + \xi F_x + \eta F_u. \qquad (5)$$

Рівність (5) називатимемо класифікуючим рівнянням.

Оскільки прямий повний аналіз класифікуючого рівняння (5) є неможливим, ми для групової класифікації рівняння (1) будемо використовувати метод, запропонований в роботах [21, 22]. Для цього, перш за все, вияснимо, які із перетворень простору V складають групу еквівалентності рівняння (1) (надалі ми позначаємо її $\mathcal{E}$). Взагалі кажучи, групу $\mathcal{E}$ складають ті із взаємооднозначних перетворень простору V

$$\bar{t} = \alpha(t, x, u), \quad \bar{x} = \beta(t, x, u), \quad v = \gamma(t, x, u), \quad \frac{D(\alpha, \beta, \gamma)}{D(t, x, u)} \neq 0, \qquad (6)$$

які залишають диференціальну структуру (вигляд) рівняння (1) незмінною. Виконавши заміну змінних (6) в рівнянні (1) і вимагаючи, щоб трансформоване рівняння мало вигляд

$$v_{\bar{t}} = \Phi(\bar{t}, \bar{x}, v, v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}\bar{x}}),$$

де Φ – довільна гладка функція своїх аргументів, приходимо до такого результату.

Твердження 2. *Групу $\mathcal{E}$ рівняння* (1) *становлять такі перетворення:*

$$\bar{t} = T(t), \quad \bar{x} = X(t, x, u), \quad v = U(t, x, u), \\ T' = \frac{dT}{dt} \neq 0, \quad \frac{D(X, U)}{D(x, u)} \neq 0. \qquad (7)$$

Метод групової класифікації, який ми використовуємо, передбачає, перш за все, використання перетворень (7) для спрощення вигляду інфінітезимальних операторів, які можуть складати базис алгебр інваріантності рівнянь вигляду (1). Заміна змінних (7) трансформує оператор (4) в оператор

$$\tilde{\mathrm{v}} = \tau T' \partial_{\bar{t}} + (\tau X_t + \xi X_x + \eta X_u)\partial_{\bar{x}} + (\tau U_t + \xi U_x + \eta U_u)\partial_v. \qquad (8)$$

Якщо в операторі (4) $\tau \neq 0$, то, поклавши функцію T рівною розв'язкові рівняння $\tau T' = 1$, а функції X, U – рівними фундаментальним розв'язкам системи рівнянь

$$\tau X_t + \xi X_x + \eta X_u = 0, \quad \tau U_t + \xi U_x + \eta U_u = 0, \quad \frac{D(X,U)}{D(x,u)} \neq 0,$$

бачимо, що оператор (8) зводиться до оператора $\tilde{\mathrm{v}} = \partial_{\bar{t}}$. Якщо ж в операторі (4) $\tau = 0$, то обов'язково або $\xi \neq 0$, або $\eta \neq 0$. Якщо в (4) $\xi \neq 0$, $\eta = 0$, то заміна змінних $\bar{t} = t$, $\bar{x} = u$, $v = x$, перетворення якої належать до групи $\mathcal{E}$, зводять оператор (4) в оператор $\tilde{\mathrm{v}} = \xi(\bar{t}, \bar{x}, v)\partial_v$. Отже, з точністю до еквівалентності, яку визначає дія перетворень з групи $\mathcal{E}$, можемо вважати, що коли $\tau = 0$, то в (4) обов'язково $\eta \neq 0$. Але тоді, поклавши в перетвореннях (7) функції X та U рівними ненульовим розв'язкам рівнянь $\xi X_x + \eta X_u = 0$, $\xi U_x + \eta U_u = 1$, бачимо, що у цьому випадкові оператор (8) зводиться до оператора $\tilde{\mathrm{v}} = \partial_v$. Отже, має місце така лема.

Лема 1. *Оператор* (4) *є еквівалентним одному з таких двох операторів:* $\mathrm{v} = \partial_t$, $\mathrm{v} = \partial_u$.

Результати леми 1 дозволяють отримати і перший класифікаційний результат для рівняння (1).

Теорема 1. *З точністю до еквівалентності існують два класи нелінійних рівнянь вигляду* (1), *які допускають максимальні однопараметричні групи інваріантності. Нижче наведено представники (їх канонічний вигляд) цих класів рівнянь та відповідні одновимірні алгебри Лі* A_1 *операторів симетрії, які генерують їх групи інваріантності:*

$$u_t = F(x, u, u_x, u_{xx}): \quad A_1^1 = \langle \partial_t \rangle;$$
$$u_x = F(t, x, u_x, u_{xx}): \quad A_1^2 = \langle \partial_u \rangle.$$

Доведення. Якщо рівняння (1) допускає однопараметричну групу інваріантності, то вона генерується інфінітезимальним оператором вигляду (4), який, згідно з результатами леми 1, є еквівалентним одному з операторів ∂_t або ∂_u.

Для оператора ∂_t класифікуюче рівняння (5) набуває вигляду $F_t = 0$, звідки випливає, що $F = F(x, u, u_x, u_{xx})$. Аналогічно переконуємося, що у рівнянні, інваріантному відносно оператора ∂_u, $F = F(t, x, u_x, u_{xx})$.

Подальша пряма перевірка показує, що у випадку довільних значень отриманих функцій ці оператори генерують максимальні групи інваріантності відповідних рівнянь, тобто їх максимальні алгебри інваріантності збігаються з A_1^1 та A_1^2. Теорема доведена.

У подальшій груповій класифікації ми розбиваємо множину рівнянь вигляду (1) з нетривіальними симетрійними властивостями на два класи. Припустимо, що рівняння вигляду (1) допускає k-вимірну ($k \geq 1$) максимальну алгебру інваріантності $A_k = \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_k \rangle$ з базисними операторами

$$\mathrm{v}_i = \tau^i \partial_t + \xi^i \partial_x + \eta^i \partial_u, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{9}$$

Якщо в операторах (9) $\tau^i \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, k$), то відповідне інваріантне рівняння ми відносимо до рівнянь першого класу. Якщо ж хоча б в одному з операторів $\tau^i \equiv 0$, то відповідне інваріантне рівняння ми відносимо до рівнянь другого класу. Як випливає з результатів леми 1 з точністю до еквівалентності ми завжди можемо один із базисних операторів алгебри інваріантності рівняння першого класу покласти рівним ∂_t, а для рівняння другого класу – ∂_u. Провівши групову класифікацію рівнянь кожного класу, ми отримаємо повний перелік рівнянь вигляду (1) з нетривіальними симетрійними властивостями.

3. Групова класифікація рівнянь першого класу. Згідно з результатами теореми 1, серед рівнянь першого класу найнижчі симетрійні властивості має рівняння

$$u_t = F(x, u, u_x, u_{xx}), \tag{10}$$

максимальною алгеброю інваріантності якого є одновимірна алгебра Лі $A_1^1 = \langle \partial_t \rangle$.

Лема 2. *Серед рівнянь першого класу не існують такі, максимальні алгебри інваріантності яких містили б як підалгебру двовимірну абелеву алгебру Лі операторів симетрії.*

Доведення. Для доведення леми нам достатньо показати, що серед рівнянь першого класу не існують такі, які б допускали двовимірні абелеві алгебри Лі операторів симетрії.

Припустимо, що таке рівняння існує. Тоді один з базисних операторів, наприклад, $\mathrm{v}_1 = \partial_t$, а другий ($\mathrm{v}_2$) має вигляд (4). Перевірка комутаційного співвідношення $[\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2] = 0$ показує, що в операторі v_2 $\tau_t = 0$, $\xi_t = 0$, $\eta_t = 0$, тобто можемо покласти $\mathrm{v}_2 =$

$\xi(x,u)\partial_x+\eta(x,u)\partial_u$. Але тоді неважко показати, що існують перетворення (8), які залишають вигляд оператора v_1 незмінним, а оператор v_2 зводять в оператор $\tilde{\mathrm{v}}_2=\partial_v$. Отже дане рівняння еквівалентне такому, алгебра інваріантності якого збігається з двовимірною алгеброю Лі операторів симетрії $\langle\partial_t,\partial_u\rangle$, тобто дане рівняння є рівнянням другого класу. Отримана суперечність і доводить лему.

З відомої теореми Леві–Мальцева (див., наприклад, [26]) випливає, що множина скінченновимірних дійсних алгебр Лі вичерпується розв'язними алгебрами Лі та алгебрами Лі з нетривіальним фактором Леві. Оскільки фактор Леві є деякою напівпростою алгеброю Лі, то для повного опису рівнянь першого класу з нетривіальними симетрійними властивостями нам, перш за все, потрібно отримати рівняння, які інваріантні відносно розв'язних та напівпростих алгебр Лі операторів симетрії.

3.1. Інваріантність відносно розв'язних алгебр Лі. Серед дійсних двовимірних розв'язних алгебр Лі з точністю до ізоморфізму розрізняють дві алгебри:

$$\begin{aligned} &A_{2.1}=\langle e_1,e_2\rangle: \quad [e_1,e_2]=0;\\ &A_{2.2}=\langle e_1,e_2\rangle: \quad [e_1,e_2]=e_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Оскільки алгебра $A_{2.1}$ є абелевою то дослідженню підлягають лише ті рівняння, які можуть допускати алгебри Лі операторів симетрії, що є ізоморфними алгебрі $A_{2.2}$ При цьому побудову реалізацій алгебри $A_{2.2}$ можна проводити поклавши один з базисних операторів, наприклад, e_2, рівним оператору ∂_t.

Отже, нехай $e_2=\partial_t$, а оператор e_1 має вигляд (4), де $\tau\neq 0$. Тоді з виконання другого комутаційного співвідношення(11) випливає, що $\tau_t=-1$, $\xi_t=\eta_t=0$. Тому в реалізації алгебри $A_{2.2}$ можна покласти, що

$$e_1=-t\partial_t+\xi(x,u)\partial_x+\eta(x,u)\partial_u. \tag{12}$$

Якщо в операторі (12) $\xi=\eta=0$, то має місце реалізація $\langle -t\partial_t,\partial_t\rangle$. Якщо ж в (12) $|\xi|+|\eta|\neq 0$, то неважко переконатися у тому, що існують такі перетворення з групи $\mathcal{E}$, які залишають вигляд оператора e_2 незмінним, а оператор e_1 (12) зводять в оператор $\tilde{e}_1=-\bar{t}\partial_{\bar{t}}-v\partial_v$.

Отже, можна стверджувати, що з точністю до еквівалентності існують дві реалізації алгебри $A_{2.2}$ $\langle -t\partial_t,\partial_t\rangle$, $\langle -t\partial_t-u\partial_u,\partial_t\rangle$, які можуть бути алгебрами інваріантності рівнянь першого класу.

Перевірка класифікуючого рівняння (5) для першої з реалізацій приводить до умови $F = 0$, звідки випливає, що ця реалізація не може бути алгеброю інваріантності досліджуваних рівнянь.

Для другої реалізації відповідна процедура показала, що $A_{2.2}$-інваріантне рівняння має вигляд

$$u_t = F(x, \omega, \mathrm{w}), \quad \omega = u^{-1}u_x, \quad \mathrm{w} = u^{-1}u_{xx}.$$

Подальшому дослідженню підлягають ті із рівнянь першого класу, які допускають тривимірні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії. Добре відомо (див., наприклад, [27]), що тривимірні розв'язні дійсні алгебри Лі $A_3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ з точністю до ізоморфізму вичерпуються двома розкладними

$$A_{3.1} = A_{2.1} \oplus A_1: \quad [e_i, e_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3;$$
$$A_{3.2} = A_{2.2} \oplus A_1: \quad [e_1, e_2] = e_2, \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$$

та сімома нерозкладними алгебрами Лі:

$$A_{3.3}: \ [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_2] = [e_1, e_3] = 0;$$
$$A_{3.4}: \ [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_1 + e_2, \quad [e_1, e_2] = 0;$$
$$A_{3.5}: \ [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2, \quad [e_1, e_2] = 0;$$
$$A_{3.6}: \ [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = -e_2, \quad [e_1, e_2] = 0;$$
$$A_{3.7}: \ [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = qe_2, \quad [e_1, e_2] = 0 \ \ (0 < |q| < 1);$$
$$A_{3.8}: \ [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_2] = 0;$$
$$A_{3.9}: \ [e_1, e_3] = qe_1 - e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1 + qe_2, \quad [e_1, e_2] = 0 \ (q > 0).$$

Неважко побачити, що усі ці алгебри містять як підалгебру алгебру $A_{2.1}$, а тому можна стверджувати, що серед рівнянь першого класу не існують такі, максимальними алгебрами інваріантності яких є тривимірні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії. Більше цього, наявність композиційного ряду в скінченновимірної розв'язної алгери Лі [27], дозволяє зробити такий висновок.

Лема 3. *З точністю до еквівалентності рівнянням*

$$u_t = F(x, \omega, \mathrm{w}), \quad \omega = u^{-1}u_x, \quad \mathrm{w} = u^{-1}u_{xx},$$

максимальною алгеброю інваріантності якого є двовимірна алгебра Лі операторів симетрії $\langle -t\partial_t - u\partial_u, \partial_t \rangle$, вичерпуються рівняння першого класу, які інваріантні відносно розв'язних алгебр Лі.

3.2. Інваріантність відносно напівпростих алгебр Лі. З точністю до ізоморфізму розрізняють [26] дві найнижчі напівпрості алгебри Лі, що мають розмірність рівну трьом:

$$\begin{aligned}
&so(3): && [e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1;\\
&sl(2,\mathbb{R}): && [e_1, e_2] = 2e_2, \quad [e_1, e_3] = -2e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1.
\end{aligned}$$

Ці алгебри не містять [28] як підалгебру двовимірну абелеву алгебру $A_{2.1}$. Аналіз структури напівпростих алгебр Лі розмірностей вищих за три (див., наприклад, [26]) показує, що всі ці алгебри містять як підалгебри двовимірні абелеві алгебри. Отже, в даному випадкові дослідженню підлягаює існування лише $SO(3)$- та $SL(2,\mathbb{R})$-інваріантних рівнянь першого класу.

Зупинимося спочатку на питанні існування реалізацій алгебри $so(3)$. Нехай оператор $e_1 = \partial_t$, а оператори e_2 та e_3 мають вигляд (4). Тоді з виконання перших двох комутаційних співвідношень, що визначають алгебру $so(3)$, випливає, що

$$\begin{aligned}
&e_2 = C\cos t\partial_t + (\alpha\cos t + \beta\sin t)\partial_x + (\gamma\cos t + \theta\sin t)\partial_u,\\
&e_3 = [\partial_t, e_2],
\end{aligned}$$

де C – довільна дійсна стала, $C \neq 0$, $\alpha = \alpha(x,u)$, $\beta = \beta(x,u)$, $\gamma = \gamma(x,u)$, $\theta = \theta(x,u)$ – довільні дійсні функції своїх аргументів. Але виконання третього комутаційного співвідношення приводить до рівності $C^2 = -1$, яка не має сенсу в дійсній області. Отже, не існують $SO(3)$-інваріантні рівняння першого класу.

Тепер розглянемо питання про існування реалізацій алгебри $sl(2,\mathbb{R})$. Нехай тут $e_3 = \partial_t$, а оператори e_1, e_2 мають вигляд (4).

Перевіривши виконання комутаційних співвідношень, що визначають алгебру $sl(2,\mathbb{R})$, та використавши ті із перетворень з групи $\mathcal{E}$, що не змінюють вигляд оператора e_3, переконуємося, що існують такі нееквівалентні реалізації алгебри $sl(2,\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
&\langle 2t\partial_t, -t^2\partial_t, \partial_t\rangle; \quad \langle 2t\partial_t + x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x, \partial_t\rangle;\\
&\langle 2t\partial_t + x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x + x^2\partial_u, \partial_t\rangle;\\
&\langle 2t\partial_t + x\partial_x, -t^2\partial_t + x(x^2 - t)\partial_x, \partial_t\rangle.
\end{aligned}$$

Перша реалізація не може бути алгеброю інваріантності рівнянь вигляду (1). Для другої реалізації із класифікуючого рівняння (5) випливає умова $xu_x = 0$. Отже, й друга реалізація не може бути алгеброю інваріантності досліджуваних рівнянь. Для третьої реалізації, проінтегрувавши визначальні рівняння, знаходимо, що

$$F = x^{-1}uu_x - x^{-2}u^2 + x^{-2}\tilde{F}(\omega, \mathrm{w}),$$
$$\omega = x^2u_{xx} - 2u, \quad \mathrm{w} = 2u - xu_x.$$

Нарешті, для останньої реалізації

$$F = -\tfrac{1}{4}x^{-1}u_x + x^{-3}u_x^{-1}\tilde{F}(u, \omega), \quad \omega = u_x^{-2}u_{xx} + 3x^{-1}u_x^{-1}.$$

Отже, можемо підвести підсумок: серед рівнянь першого класу існують лише два рівняння, які інваріантні відносно напівпростих алгебр Лі операторів симетрії, ізоморфних алгебрі $sl(2,\mathbb{R})$.

3.3. Завершення групової класифікації рівнянь першого класу. Для завершення групової класифікації рівнянь першого класу залишається вивчити питання про наявність рівнянь, які допускають алгебри Лі операторів симетрії з нетривіальним фактором Леві і ненульовим радикалом. Очевидно, що такими алгебрами інваріантності можуть бути лише алгебри Лі операторів симетрії, які розкладаються в напівпрямі суми напівпростої та розв'язної алгебр Лі. При цьому, як показано вище, розв'язна алгебра може бути або одновимірною, або ізоморфною алгебрі $A_{2.2}$. Структура таких алгебр з фактором Леві $sl(2,\mathbb{R})$ вивчена в [29]. Згідно з результатами цієї роботи, не існують алгебри Лі з вказаною вище властивістю, а тому не існують і рівняння першого класу з нетривіальними симетрійними властивостями, окрім рівнянь, які були отримані вище. З іншого боку очевидним є те, що отримані рівняння містять довільні функції трьох і двох змінних, а тому для деяких значень цих функцій симетрійні властивості рівнянь будуть розширюватися. Але такі рівняння вже належатимуть до рівнянь другого класу.

Підведемо підсумок дослідженням у вигляді теореми.

Теорема 2. *З точністю до еквівалентності серед рівнянь першого класу лише три мають нетривіальні симетрійні властивості. Це рівняння отримане в лемі 3, максимальна алгебра інваріантності якого ізоморфна алгебрі $A_{2.2}$, та ще два $SL(2,\mathbb{R})$-інваріантні рівняння. Нижче наведено вигляд цих рівнянь та реалізації алгебри $sl(2,\mathbb{R})$, які є їх максимальними алгебрами інваріантності:*

$$u_t = x^{-1}uu_x - x^{-2}u^2 + x^{-2}\tilde{F}(\omega, \mathrm{w}),$$
$$\omega = x^2u_{xx} - 2u, \quad \mathrm{w} = 2u - xu_x :$$

$$sl^1(2,\mathbb{R}) = \langle 2t\partial_t + x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x + x^2\partial_u, \partial_t\rangle;$$

$$u_t = -\tfrac{1}{4}x^{-1}u_x + x^{-3}u_x^{-1}\tilde{F}(u,\omega),$$

$$\omega = u_x^{-2}u_{xx} + 3x^{-1}u_x^{-1} :$$

$$sl^2(2,\mathbb{R}) = \langle 2t\partial_t + x\partial_x, -t^2\partial_t + x(x^2 - t)\partial_x, \partial_t\rangle.$$

4. Інваріантність рівнянь другого класу відносно алгебр Лі з нетривіальним розкладом Леві. Як було відзначено вище, опис рівнянь, інваріантних відносно алгебр Лі операторів симетрії даного типу, передбачає, перш за все, опис рівнянь вигляду

$$u_t = F(t, x, u_x, u_{xx}), \quad F_{u_{xx}} \neq 0, \tag{13}$$

інваріантних відносно напівпростих алгебр Лі операторів симетрії. Саме з опису таких рівнянь ми і продовжуємо групову класифікацію рівняння (1).

4.1. Інваріантність відносно напівпростих алгебр Лі. Оскільки рівняння (13) допускає одновимірну алгебру інваріантності $A_1^2 = \langle\partial_u\rangle$, то один з базисних операторів в напівпростій алгебрі Лі, які будуть досліджені нижче, ми відразу можемо покласти рівним ∂_u. Знову стартуємо з розгляду найнижчих напівпростих алгебр Лі.

Випадок алгебри $so(3)$. Нехай $e_1 = \partial_u$, а оператори e_2 і e_3 мають вигляд (4). З виконання перших двох комутаційних співвідношень, що визначають алгебру $so(3)$, випливає, що з точністю до еквівалентності можемо покласти $e_3 = [\partial_t e_3]$,

$$e_2 = \alpha(t,x)\cos u\partial_x + [\beta(t,x)\cos u + \gamma(t,x)\sin u]\partial_u.$$

Перевірка третього комутаційного співвідношення приводить до умов:

$$\alpha\beta = 0, \quad \alpha\gamma_x - \beta^2 - \gamma^2 = 1. \tag{14}$$

Якщо $\alpha = 0$, то друга рівність (14) набуває вигляду $\beta^2 + \gamma^2 = -1$ і не має сенсу в дійсній області. Якщо ж $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, то заміна змінних $\bar{t} = t$, $\bar{x} = X(t,x)$ $(\alpha X_x = 1)$, $v = u$, дозволяє покласти

$$e_2 = \cos u\partial_x + \gamma(t,x)\sin u\partial_u, \quad e_3 = [\partial_t, e_2],$$

де функція $\gamma = \gamma(t,x)$ є розв'язком рівняння $\gamma_x = 1 + \gamma^2$, тобто $\gamma = \tan(x + \varphi(t))$.

Тому з точністю до еквівалентності, яку визначають перетворення $\bar{t} = t$, $\bar{x} = x + \varphi(t)$, $v = u$, $\gamma = \tan x$. Отже, в заданому класі операторів існує одна реалізація алгебри $so(3)$,

$$so^1(3) = \langle \partial_u, \cos u\partial_x + \tan x \sin u\partial_u, -\sin u\partial_x + \tan x \cos u\partial_u \rangle,$$

для якої розв'язок системи (5) має вигляд

$$F = \sqrt{\sec^2 x + u_x^2}\tilde{F}(t, \omega), \quad (15)$$
$$\omega = [u_{xx} \cos x - (2 + u_x^2 \cos^2 x)u_x \sin x](1 + u_x^2 \cos^2 x)^{-\frac{3}{2}}.$$

Подальша підстановка функції F (15) у класифікуюче рівняння показала, що реалізація $so^1(3)$ є максимальною алгеброю інваріантності отриманого рівняння. Отже, має місце таке твердження.

Лема 4. *З точністю до еквівалентності існує одне рівняння вигляду* (13) *максимальна алгебра інваріантності якого ізоморфна алгебрі* $so(3)$. *Нижче наведено канонічний вигляд цього рівняння та відповідна максимальна алгебра інваріантності:*

$$u_t = \sqrt{\sec^2 x + u_x^2}\tilde{F}(t, \omega), \quad \tilde{F}_\omega \neq 0,$$
$$\omega = [u_{xx} \cos x - (2 + u_x^2 \cos^2 x)u_x \sin x](1 + u_x^2 \cos^2 x)^{-\frac{3}{2}} :$$
$$so^1(3) = \langle \partial_u, \cos u\partial_x + \tan x \sin u\partial_u, -\sin u\partial_x + \tan x \cos u\partial_u \rangle.$$

Випадок алгебри $sl(2,\mathbb{R})$. Нехай $e_3 = \partial_u$, а оператори e_1, e_2 мають вигляд (4).

Тоді із виконання комутаційних співвідношень, які визначають алгебру $sl(2,\mathbb{R})$, випливає, що

$$e_2 = (\alpha u + \beta)\partial_x + (-u^2 + \gamma u + \theta)\partial_u, \quad e_1 = [\partial_u, e_2], \quad e_3 = \partial_u,$$

де функції $\alpha = \alpha(t,x)$, $\beta = \beta(t,x)$, $\gamma = \gamma(t,x)$, $\theta = \theta(t,x)$ задовольняють співвідношення

$$2\beta = -\alpha\beta_x - \alpha\gamma + \beta\alpha_x, \quad 4\theta = -\alpha\theta_x - \gamma^2 + \beta\gamma_x. \quad (16)$$

Якщо в операторі e_2 $\alpha \neq 0$, то з точністю до еквівалентності, яку визначають перетворення $\bar{t} = t$, $\bar{x} = X(t,x)$, $v = u + U(t,x)$, де функції X ($X_x \neq 0$) та U задовольняють рівняння $\alpha X_x = X$, $XU = \beta X_x$, можемо покласти (в початкових позначеннях змінних)

$$e_2 = xu\partial_x + (-u^2 + \gamma u + \theta)\partial_u, \quad e_1 = [\partial_u, e_2], \quad e_3 = \partial_u.$$

Тоді система рівнянь (16) набуде вигляду $x\gamma = 0$, $4\theta = -x\theta_x - \gamma^2$, звідки випливає, що $\gamma = 0$, $\theta = \mu(t)x^{-4}$. Якщо $\mu = 0$, то має місце така реалізація алгебри $sl(2,\mathbb{R})$: $\langle 2u\partial_u - x\partial_x, -u^2\partial_u + xu\partial_x, \partial_u\rangle$. Якщо ж $\mu \neq 0$, то з точністю до еквівалентності, яку визначають перетворення $\bar{t} = t$, $\bar{x} = |\mu|^{-\frac{1}{4}}x$, $v = u$, приходимо до таких реалізацій алгебри $sl(2,\mathbb{R})$:

$$\langle 2u\partial_u - x\partial_x, (x^{-4} - u^2)\partial_u + xu\partial_x, \partial_u\rangle,$$
$$\langle 2u\partial_u - x\partial_x, -(x^{-4} + u^2) + xu\partial_x, \partial_u\rangle.$$

Якщо в операторі e_2, $\alpha = 0$, то, врахувавши співвідношення (16), неважко переконатися, що з точністю до еквівалентності має місце така реалізація алгебри $sl(2,\mathbb{R})$: $\langle 2u\partial_u, -u^2\partial_u, \partial_u\rangle$.

Подальша перевірка показала, що остання реалізація не може бути алгеброю інваріантності рівнянь вигляду (13). Перші три реалізації задовольняють умови сформульованої задачі і є максимальними алгебрами інваріантності рівнянь досліджуваного типу. Загальний результат досліджень подано у наступному твердженні.

Лема 5. *З точністю до еквівалентності існують три рівняння другого класу, максимальними алгебрами інваріантності яких є алгебри Лі операторів симетрії ізоморфні алгебрі* $sl(2,\mathbb{R})$. *Канонічний вигляд цих рівнянь та відповідні максимальні алгебри інваріантності подано нижче:*

$$\begin{aligned}
&u_t = xu_x\tilde{F}(t,\omega), \quad \omega = x^{-5}u_x^{-3}u_{xx} + 2x^{-6}u_x^{-2} :\\
&\qquad sl^3(2,\mathbb{R}) = \langle 2u\partial_u - x\partial_x, -u^2\partial_u + xu\partial_x, \partial_u\rangle;\\
&u_t = x^{-2}\sqrt{4 + x^6u_x^2}\tilde{F}(t,\omega),\\
&\qquad \omega = (4 + x^6u_x^2)^{-\frac{3}{2}}\left(x^4u_{xx} + 5x^3u_x + \tfrac{1}{2}x^9u_x^3\right) :\\
&\qquad sl^4(2,\mathbb{R}) = \langle 2u\partial_u - x\partial_x, (x^{-4} - u^2)\partial_u + xu\partial_x, \partial_u\rangle;\\
&u_t = x^{-2}\sqrt{|x^6u_x^2 - 4|}\tilde{F}(t,\omega),\\
&\qquad \omega = |x^6u_x^2 - 4|^{-\frac{3}{2}}\left(x^4u_{xx} + 5x^3u_x - \tfrac{1}{2}x^9u_x^3\right) :\\
&\qquad sl^5(2,\mathbb{R}) = \langle 2u\partial_u - x\partial_x, -(x^{-4} + u^2)\partial_u + xu\partial_x, \partial_u\rangle.
\end{aligned}$$

У всіх отриманих рівняннях $\tilde{F}_\omega \neq 0$.

Нарешті, провівши міркування аналогічні тим, які були зроблені в [22], неважко переконатися у справедливості такої теореми.

Теорема 4. *З точністю до еквівалентності рівняннями, отриманими в лемах 4, 5, вичерпуються рівняння другого класу, які інваріантні відносно напівпростих алгебр Лі операторів симетрії.*

4.2. Інваріантність відносно алгебр Лі з з нетривіальним розкладом Леві. Наявність переліку нееквівалентних рівнянь вигляду (1), які інваріантні відносно напівпростих алгебр Лі операторів симетрії, дозволяє провести опис тих рівнянь, алгебри інваріантності яких мають нетривіальний розклад Леві. Серед алгебр Лі з такою властивістю розрізняють алгебри Лі, які розкладаються в пряму суму напівпростої та розв'язної алгебр Лі, та алгебри Лі, які є напівпрямими сумами фактора Леві та ненульового розв'язного радикалу.

4.2.1. Інваріантність відносно прямої суми напівпростої та розв'язної алгебр Лі. Для опису таких рівнянь нам достатньо провести розширення відомих реалізацій напівпростих алгебр Лі в класі операторів (4) до реалізацій алгебр Лі вказаного типу, а потім перевірити отримані реалізації на предмет того, чи можуть вони бути алгебрами інваріантності рівнянь досліджуваного вигляду. При цьому подальшому розгляду підлягають як отримані в лемах 4 та 5 рівняння другого класу, так і рівняння першого класу, максимальними алгебрами інваріантності яких є реалізації $sl^1(2,\mathbb{R})$ та $sl^2(2,\mathbb{R})$.

Зупинимося детально на випадкові $sl^1(2,\mathbb{R})$-інваріантного рівняння. Розширення реалізації $sl^1(2,\mathbb{R})$ ми можемо проводити тими операторами вигляду (4), які комутують з базисними операторами алгебри $sl^1(2,\mathbb{R})$ на нуль. Безпосередня перевірка показує, що таку умову задовольняють оператори вигляду

$$\mathrm{v} = C_1 x\partial_x + (C_2 + 2C_1 u)\partial_u, \tag{17}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Далі неважко переконатися, що в класі операторів (17) існують реалізації двох одновимірних алгебр Лі L_1: $\langle \partial_u \rangle$, $\langle x\partial_x + 2u\partial_u \rangle$; та однієї двовимірної алгебри Лі $L_2 = \langle \partial_u, x\partial_x + 2u\partial_u \rangle$, яка ізоморфна алгебрі $A_{2.2}$.

Подальша перевірка отриманих алгебр Лі операторів симетрії показала, що вони можуть бути алгебрами інваріантності рівнянь вигляду (1). При цьому, в $sl^1(2,\mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u \rangle$-інваріантному рівнянні

$$F = \tfrac{1}{4}u_x^2 + x^{-2}\tilde{F}(\omega), \quad \omega = x^2 u_{xx} - x u_x;$$

в $sl^1(2,\mathbb{R}) \oplus \langle x\partial_x + 2u\partial_u \rangle$-інваріантному рівнянні

$$F = x^{-1}uu_x - x^{-2}u^2 + x^{-2}(2u - xu_x)^2\tilde{F}(\omega),$$

$$\omega = (x^2 u_{xx} - 2u)(2u - xu_x)^{-1};$$

а в $sl^1 2, (\mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u, x\partial_x + 2u\partial_u \rangle$-інваріантному рівнянні

$$F = mx^2 u_{xx}^2 - 2mxu_x u_{xx} + \left(m + \tfrac{1}{4}\right) u_x^2, \quad m \neq 0.$$

Також, безпосередні обчислення показують, що знайдені реалізації є максимальними алгебрами інваріантності відповідних рівнянь.

Для реалізації $sl^2(2, \mathbb{R})$ розширення можливі в класі операторів

$$\mathrm{v} = \eta(u)\partial_u. \tag{18}$$

З точністю до еквівалентності в класі операторів (18) існує одна реалізація одновимірної алгебри Лі $L_1 = \langle \partial_u \rangle$ та одна реалізація двохвимірної алгебри Лі $L_2 = \langle -u\partial_u, \partial_u \rangle$, при цьому $L_2 \sim A_{2.2}$. А оскільки в класі операторів (18) не існують реалізації алгебри $A_{2.1}$, то в цьому класі операторів не існуватимуть і реалізації розв'язних алгебр Лі розмірностей вищих за два. Отже, ми отримали два розширення реалізації $sl^2(2, \mathbb{R})$, які є максимальними алгебрами інваріантності рівнянь вигляду (1). При цьому в $sl^2(2, \mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u \rangle$-інваріантному рівнянні

$$F = -\tfrac{1}{4}x^{-1}u_x + x^{-3}u_x^{-1}\tilde{F}(\omega), \quad \omega = u_x^{-2}u_{xx} + 3x^{-1}u_x^{-1};$$

в $sl^2(2, \mathbb{R}) \oplus \langle -u\partial_u, \partial_u \rangle$-інваріантному рівнянні

$$F = -\tfrac{1}{4}x^{-1}u_x + mx^{-3}u_x^{-1}(u_x^{-2}u_{xx} + 3x^{-1}u_x^{-1})^{-2}, \quad m \neq 0.$$

Аналогічний розгляд реалізації $sl^3(2, \mathbb{R})$ показав, що дослідженню підлягають алгебри Лі в класі операторів

$$\mathrm{v} = \tau(t)\partial_t + \xi(t)x\partial_x. \tag{19}$$

Використавши ті із перетворень з групи $\mathcal{E}$, які залишають вигляд базисних операторів реалізації $sl^3(2, \mathbb{R})$ незмінним, неважко переконатися, що з точністю до еквівалентності в класі операторів (19) існують три реалізації одновимірної алгебри Лі: $\langle \partial_t \rangle$, $\langle x\partial_x \rangle$, $\langle tx\partial_x \rangle$. Але, як показала безпосередня перевірка, умовам сформульованої задачі задовольняють лише перша і третя реалізації. Подальше підвищення розмірності на одиницю привело до однієї реалізації алгебри $A_{2.1}$: $\langle f(t)x\partial_x, tx\partial_x \rangle$ $\left(\frac{d^2 f}{dt^2} \neq 0\right)$, та двох реалізацій алгебри $A_{2.2}$:

$\langle -t\partial_t - mx\partial_x, \partial_t\rangle (m \in \mathbb{R})$, $\langle t\partial_t, tx\partial_x\rangle$. А оскільки реалізація алгебри $A_{2.1}$ не задовольняє умовам сформульованої задачі, то отриманими вище чотирма реалізаціями вичерпуються ті, які задовольняють умовам сформульованої задачі. Ці реалізації є максимальними алгебрами інваріантності відповідних рівнянь і при цьому в $sl^3(2,\mathbb{R})\oplus\langle\partial_t\rangle$-інваріантному рівнянні

$$F = xu_x\tilde{F}(\omega), \quad \omega = x^{-5}u_x^{-3}u_{xx} + 2x^{-6}u_x^{-2};$$

в $sl^3(2,\mathbb{R}) \oplus \langle tx\partial_x\rangle$-інваріантному рівнянні

$$F = \frac{xu_x}{4t}\ln\left|x^{-5}u_x^{-3}u_{xx} + 2x^{-6}u_x^{-2}\right| + xu_x\tilde{F}(t);$$

в $sl^3(2,\mathbb{R}) \oplus \langle -t\partial_t - mx\partial_x, \partial_t\rangle$-інваріантному рівнянні

$$F = \lambda xu_x|x^{-5}u_x^{-3}u_{xx} + 2x^{-6}u_x^{-2}|^{\frac{1}{4m}}, \quad \lambda \neq 0, \quad m \neq 0, \pm\tfrac{3}{4};$$

в $sl^3(2,\mathbb{R}) \oplus \langle t\partial_t, tx\partial_x\rangle$-інваріантному рівнянні

$$F = \frac{xu_x}{4t}\ln|x^{-5}u_x^{-3}u_{xx} + 2x^{-6}u_x^{-2}| + \frac{\lambda xu_x}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Провівши аналогічний розгляд реалізацій $sl^4(2,\mathbb{R})$, $sl^5(2,\mathbb{R})$ та $so^1(3)$, ми отримали ще три рівняння, максимальними алгебрами інваріантності яких є алгебри Лі операторів симетрії, що розкладаються в пряму суму напівпростого фактора Леві та розв'язної алгебри Лі. Нижче наведено реалізації цих алгебр та значення функції F в інваріантних рівняннях:

$$\begin{aligned}
&sl^4(2,\mathbb{R}) \oplus \langle\partial_t\rangle : F = x^{-2}\sqrt{4 + x^6u_x^2}\tilde{F}(\omega),\\
&\quad \omega = (4 + x^6u_x^2)^{-\frac{3}{2}}\left(x^4u_{xx} + 5x^3u_x + \tfrac{1}{2}x^9u_x^3\right);\\
&sl^5(2,\mathbb{R}) \oplus \langle\partial_t\rangle : F = x^{-2}\sqrt{|x^6u_x^2 - 4|}\tilde{F}(\omega),\\
&\quad \omega = |x^6u_x^2 - 4|^{-\frac{3}{2}}\left(x^4u_{xx} + 5x^3u_x - \tfrac{1}{2}x^9u_x^3\right);\\
&so^1(3) \oplus \langle\partial_t\rangle : F = \sqrt{\sec^2 x + u_x^2}\tilde{F}(\omega),\\
&\quad \omega = [u_{xx}\cos x - (2 + u_x^2\cos^2 x)u_x\sin x](1 + u_x^2\cos^2 x)^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

4.2.2. Інваріантність відносно напівпрямої суми напівпростої та розв'язної алгебр Лі. Для опису рівнянь цього типу будемо використовувати відому класифікацію [29] неізоморфних алгебр, які розкладаються в напівпряму суму фактора Леві і розв'язного радикала.

Згідно з результатами роботи [30], без втрати загальності, ми можемо обмежитися дослідженням існування рівнянь, які допускають алгебри інваріантності, що є напівпрямими сумами напівпростої та розв'язної алгебр Лі і мають розмірність не вищу за 6 (якщо фактор Леві є ізоморфним $so(3)$), та не вищу за 5 (якщо фактор Леві є ізоморфним $sl(2,\mathbb{R})$).

Також, використовуючи метод Лі–Овсяннікова, ми здійснили групову класифікацію рівнянь, інваріантних відносно прямої суми напівпростої та розв'язної алгебр Лі операторів симетрії, які були отримані в попередніх пунктах розділу.

У подальшому ми будемо використовувати відомий (див., наприклад, [22, 27]) перелік неізоморфних чотиривимірних розв'язних алгебр Лі, згідно з яким такі алгебри вичерпуються 10 розкладними алгебрами Лі $A_{3.i} \oplus A_1$ $(i = 1, 2, \ldots, 9)$, $2A_{2.2} = A_{2.2} \oplus A_{2.2}$ та 10 нерозкладними алгебрами Лі $A_{4.i} = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ алгебрами Лі. В рамках сказаного вище, дослідженню підлягає існування рівнянь, які інваріантні відносно алгебр Лі $sl(2,\mathbb{R}) \subset\!\!\!\!+ A_{2.1}$, $so(3) \subset\!\!\!\!+ A_{3.1}$. Оскільки розгляд усіх випадків про водився аналогічно, зупинимося детально на дослідженні існування $sl^1(2,\mathbb{R}) \subset\!\!\!\!+ A_{2.1}$-інваріантних рівнянь.

Нехай $sl(2,\mathbb{R}) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, $A_{2.1} = \langle e_4, e_5 \rangle$. Тоді для $sl^1(2,\mathbb{R})$ $e_1 = 2t\partial_t + x\partial_x$, $e_2 = -t^2\partial_t - tx\partial_x + x^2\partial_u$, $e_3 = \partial_t$. Базисні елементи напівпростої та розв'язної алгебр Лі зв'язані такими ненульовими комутаційними співвідношеннями:

$$[e_1, e_4] = e_4, \quad [e_1, e_5] = -e_5, \quad [e_2, e_5] = e_4, \quad [e_3, e_4] = e_5. \tag{20}$$

Поклавши оператори e_4, e_5 рівними операторам вигляду (4) і перевіривши виконання комутаційних співвідношень (20), приходимо до такого результату: в класі операторів (4) з точністю до еквівалентності існують чотири реалізації алгебри $sl^1(2,\mathbb{R}) \subset\!\!\!\!+ A_{2.1}$, де базисні оператори алгебри $A_{2.1}$ мають такий вигляд:

1) $e_4 = t\partial_x + 2tx^{-1}u\partial_u, \quad e_5 = \partial_x + 2x^{-1}u\partial_u;$

2) $e_4 = t\partial_x + (tx^{-1}u - x)\partial_u, \quad e_5 = \partial_x + x^{-1}u\partial_u;$

3) $e_4 = tx^{-1}\partial_u, \quad e_5 = x^{-1}\partial_u;$

4) $e_4 = (tu + x^2)\partial_x + (2ux + 2tx^{-1}u^2)\partial_u, \quad e_5 = u\partial_x + 2x^{-1}u^2\partial_u.$

Подальша перевірка отриманих реалізацій на предмет того, чи можуть вони бути алгебрами інваріантності рівнянь вигляду (1), показала, що умовам сформульованої задачі задовольняють лише друга і четверта реалізації. При цьому відповідні інваріантні рівняння мають такий вигляд:

$$sl^1(2,\mathbb{R})\oplus\langle t\partial_x + (tx^{-1}u - x)\partial_u, \partial_x + x^{-1}u\partial_u\rangle :$$
$$u_t = \lambda u_{xx} + 2\lambda x^{-2}u - 2\lambda x^{-1}u_x + x^{-1}uu_x - x^{-2}u^2, \quad \lambda \neq 0;$$
$$sl^1(2,\mathbb{R})\oplus\langle (tu + x^2)\partial_x + 2(xu + tx^{-1}u^2)\partial_u, u\partial_x + 2x^{-1}u^2\partial_u\rangle :$$
$$u_t = x^{-1}uu_x - x^{-2}u^2 + \lambda x^{-2}(2u - xu_x) \times$$
$$\times (x^2u_{xx} + 2u - 2xu_x)^{-1}, \qquad \lambda \neq 0.$$

Відзначимо, що пряма перевірка показала, що відповідні реалізації є максимальними алгебрами інваріантності отриманих рівнянь.

Далі ми прийшли до такого результату: для реалізацій $sl^2(2,\mathbb{R})$, $sl^4(2,\mathbb{R})$, $sl^5(2,\mathbb{R})$ в класі операторів (4) не існують розширення до реалізацій алгебри $sl(2,\mathbb{R})\oplus A_{2.1}$, як і розширення реалізації $so^1(3)$ до реалізацій алгебри $so^1(3)\oplus A_{3.1}$.

До нових $sl(2,\mathbb{R})\oplus A_{2.1}$-інваріантних рівнянь привів розгляд реалізації $sl^3(2,\mathbb{R})$:

$$sl^3(2,\mathbb{R})\oplus\langle -\partial_x + x^{-1}u\partial_u, x^{-1}\partial_u\rangle :$$
$$u_t = x^{-1}[xu_{xx} + 2u_x]^{\frac{1}{3}}F(t); \tag{21}$$
$$sl^3(2,\mathbb{R})\oplus\langle x^2u\partial_x, x^2\partial_x\rangle : \quad u_t = x^3u_x^2[xu_{xx} + 2u_x]^{-\frac{1}{3}}F(t). \tag{22}$$

Безпосередня перевірка показала, що для отриманих рівнянь відповідні алгебри інваріантності не є максимальними алгебрами інваріантності. Але, перш за все, зауважимо, що оскільки в отриманих рівняннях $F(t) \neq 0$, то заміна змінних $\bar{t} = \int F(t)dt$, $\bar{x} = x$, $v = u$, дозволяє покласти $F \equiv 1$. Далі, скориставшись алгоритмом Лі, ми отримали, що максимальна алгебра інваріантності рівняння (21), в якому $F = 1$, збігається з алгеброю

$$sl^3(2,\mathbb{R})\oplus\langle \partial_t, x\partial_x + \tfrac{4}{3}t\partial_t, x^{-1}\partial_u, -\partial_x + x^{-1}u\partial_u\rangle,$$

яка ізоморфна алгебрі Лі $sl(2,\mathbb{R})\oplus + A_{4.5}$ $\left(q = 1, p = \frac{4}{3}\right)$, а рівняння (22), в якому $F = 1$ – з алгеброю

$$sl^3(2,\mathbb{R})\oplus\langle \partial_t, \tfrac{4}{3}t\partial_t - x\partial_x, x^2u\partial_x, x^2\partial_x\rangle,$$

яка ізоморфна алгебрі Лі $sl(2,\mathbb{R})\oplus A_{4.5}$ $\left(q = 1, p = \frac{4}{3}\right)$.

Групова класифікація рівнянь, які були отримані в попередньому пункті, показала таке. У випадкові $sl^1(2,\mathbb{R}) \oplus \langle\partial_u\rangle$-інваріантного рівняння підстановка функції

$$F = \tfrac{1}{4}u_x^2 + x^{-2}\tilde{F}(\omega), \quad \omega = x^2 u_{xx} - x u_x,$$

в класифікуюче рівняння (5) та подальше "розщеплення" отриманої рівності за степенями вільної диференціальної змінної u_x, приводить до такої системи диференціальних рівнянь для визначення значень функцій τ, ξ, η та $\tilde{F}$:

$$\begin{aligned}
&[x^{-2}(2x^{-1}\xi + \eta_u - 2\xi_x)\omega - x^{-1}\eta_x + \eta_{xx}]\tilde{F}_\omega = \\
&\quad = x^{-2}(\eta_u - \tau_t + 2x^{-1}\xi)\tilde{F}, \\
&(3x^{-2}\xi_u\omega + \xi_{xx} + x^{-1}\xi_x - x^{-2}\xi - 2\eta_{xu})\tilde{F}_\omega = \\
&\quad = x^{-2}\xi_u\tilde{F} + \tfrac{1}{2}\eta_x + \xi_t, \\
&(2\xi_{xu} - \eta_{uu} + 2x^{-1}\xi_u)\tilde{F}_\omega = \tfrac{1}{4}\eta_u + \tfrac{1}{4}\tau_t - \tfrac{1}{2}\xi_x, \quad \xi_{uu}\tilde{F}_\omega = -\tfrac{1}{4}\xi_u.
\end{aligned} \tag{23}$$

Із системи (23) неважко отримати вже відомий результат: якщо функція $\tilde{F}$ є довільною функцією змінної ω, то реалізація $sl^1(2,\mathbb{R}) \oplus \langle\partial_u\rangle$ є максимальною алгеброю інваріантності відповідного рівняння.

Структура двох останніх рівнянь системи (23) показує, що або функція $\tilde{F}$ є лінійною функцією змінної ω, або ж

$$\xi_u = \eta_{uu} = 0, \quad 2\xi_x - \eta_u - \tau_t = 0. \tag{24}$$

Якщо $\tilde{F} = \lambda\omega + C$, $\lambda \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$, то максимальною групою інваріантності досліджуваного рівняння буде нескінченнопараметрична група локальних перетворень. А саме, якщо $C \neq 3\lambda$, то ця група буде генеруватися базисними операторами реалізації. $sl^1(2,\mathbb{R}) \oplus \langle\partial_u\rangle$ та оператором $\mathrm{v}_\infty = \alpha(t,x)\exp\left(\frac{u}{4\lambda}\right)\partial_u$, де функція $\alpha = \alpha(t,x)$ є розв'язком рівняння $\alpha_t = \lambda\alpha_{xx} - \lambda x^{-1}\alpha_x - \frac{C}{4\lambda}x^{-2}\alpha$; якщо ж $C = 3\lambda$, то з'являються два додаткові оператори симетрії $t\partial_x + 2(\lambda x^{-1}t - x)\partial_u$, $\partial_x + 2\lambda x^{-1}\partial_u$.

Але локальна заміна змінних $\bar{t} = t$, $\bar{x} = x$, $u = 4\lambda\ln|v|$, $v = v(\bar{t},\bar{x})$, зводить отримане рівняння до лінійного рівняння теплопровідності $v_{\bar{t}} = \lambda v_{\bar{x}\bar{x}} - \lambda x^{-1}v_{\bar{x}} + \frac{C}{4\lambda}\bar{x}^{-2}v$. Звідси випливає, що отримане нелінійне рівняння є еквівалентним при $C = 3\lambda$ класичному рівнянню теплопровідності, при $C \neq 3\lambda$ – лінійному рівнянню теплопровідності, а тому не задовольняє умовам сформульованої задачі і з подальшого розгляду вилучається.

Якщо функція $\tilde{F}$ не є лінійною функцією змінної ω, то, врахувавши рівності (24), із (23) отримуємо таку систему двох рівнянь для визначення функцій, τ, $\xi = \xi(t,x)$, $\eta = (2\xi_x - \tau_x)u + \theta(t,x)$ і $\tilde{F}$:

$$\begin{aligned}&[x^{-2}(2x^{-1}\xi + \eta_u - 2\xi_x)\omega - x^{-1}\eta_x + \eta_{xx}]\tilde{F}_\omega =\\&\quad = x^{-2}(\eta_u - \tau_t + 2x^{-1}\xi)\tilde{F} + \eta_t,\\&(2\eta_{xu} - \xi_{xx} - x^{-1}\xi_x + x^{-2}\xi)\tilde{F}_\omega = -\tfrac{1}{2}\eta_x - \xi_t.\end{aligned}\tag{25}$$

Оскільки випадок, коли $\tilde{F}$ є лінійною функцією змінної ω ми вже дослідили, класифікуючим є перше з рівнянь (25). Розглядаючи його як звичайне диференціальне рівняння відносно функції $\tilde{F}$, неважко отримати, що вивченню підлягають такі її значення:

$$\begin{aligned}&\tilde{F} = \lambda\exp(p\omega) + m, \quad \lambda p \neq 0, \quad m \in \mathbb{R};\\&\tilde{F} = \lambda\ln|\omega + b| + m, \quad \lambda \neq 0, \quad b, m \in \mathbb{R};\\&\tilde{F} = \lambda|\omega + b|^p + m, \quad \lambda p \neq 0, \quad p \neq 1, \quad b, m \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Безпосередня підстановка цих значень функції $\tilde{F}$ в рівняння (25) показала, що розширення симетрії відбувається лише тоді, коли $\tilde{F} = \lambda\omega^2$, що відповідає вже відомому $sl^1(2,\mathbb{R}) \oplus \langle\partial_u, x\partial_x + 2u\partial_u\rangle$-інваріантному рівнянню.

До цього ж рівняння привело дослідження і $sl^1(2,\mathbb{R}) \oplus \langle x\partial_x + 2u\partial_u\rangle$-інваріантного рівняння.

Аналогічний розгляд решти отриманих в пункті 4.2.1 рівнянь привів до таких результатів:

- $sl^2(2,\mathbb{R}) \oplus \langle\partial_u\rangle$-інваріантне рівняння допускає розширення симетрії тоді, коли воно збігається з рівнянням, яке еквівалентне $sl^2(2,\mathbb{R}) \oplus \langle -u\partial_u, \partial_u\rangle$-інваріантному рівнянню;
- $sl^3(2,\mathbb{R}) \oplus \langle tx\partial_x\rangle$-інваріантне рівняння допускає розширення симетрії, коли воно збігається з рівнянням, яке еквівалентне $sl^3(2,\mathbb{R}) \oplus \langle t\partial_t, tx\partial_x\rangle$-інваріантному рівнянню;
- $sl^3(2,\mathbb{R}) \oplus \langle\partial_t\rangle$-інваріантне рівняння допускає розширення симетрії, коли воно збігається з рівнянням, яке еквівалентне $sl^3(2,\mathbb{R}) \oplus \langle -t\partial_t - mx\partial_x, \partial_t\rangle$-, $sl^3(2,\mathbb{R}) \oplus \langle t\partial_t, tx\partial_x\rangle$-, $sl^3(2,\mathbb{R}) \niplus \langle\partial_t, x\partial_x + \frac{4}{3}t\partial_t, x^{-1}\partial_u, -\partial_x + x^{-1}u\partial_u\rangle$- або $sl^3(2,\mathbb{R}) \niplus \langle\partial_t, \frac{4}{3}t\partial_t - x\partial_x, x^2u\partial_x, x^2\partial_x\rangle$-інваріантному рівнянню;

- в рамках сформульованої задачі $sl^4(2,\mathbb{R})\oplus\langle\partial_t\rangle$– $sl^5(2,\mathbb{R})\oplus\langle\partial_t\rangle$- та $so^1(3)\oplus\langle\partial_t\rangle$-інваріантні рівняння розширення симетрії не допускають.

4.2.3. Рівняння, інваріантні відносно алгебр Лі з нетривіальним розкладом Леві. Тут ми підводимо підсумок досліджень, які проведені в підрозділі 4.2.2, і наводимо повний перелік рівнянь другого класу, максимальні алгебри інваріантності яких мають нетривіальний розклад Леві.

$$sl^1(2,\mathbb{R})\oplus\langle\partial_u\rangle:\quad u_t=\tfrac14 u_x^2+x^{-2}F(\omega),\quad \omega=x^2u_{xx}-xu_x;$$

$$sl^1(2,\mathbb{R})\oplus\langle x\partial_x+2u\partial_u\rangle:$$
$$u_t=x^{-1}uu_x-x^{-2}u^2+x^{-2}(2u-xu_x)^2F(\omega),$$
$$\omega=(x^2u_{xx}-2u)(2u-xu_x)^{-1};$$

$$sl^2(2,\mathbb{R})\oplus\langle\partial_u\rangle:\quad u_t=-\tfrac14 x^{-1}u_x+x^{-3}u_x^{-1}F(\omega),$$
$$\omega=u_x^{-2}u_{xx}+3x^{-1}u_x^{-1};$$

$$sl^3(2,\mathbb{R})\oplus\langle\partial_t\rangle:\quad u_t=xu_xF(\omega),$$
$$\omega=x^{-5}u_x^{-3}u_{xx}+2x^{-6}u_x^{-2};$$

$$sl^3(2,\mathbb{R})\oplus\langle tx\partial_x\rangle:$$
$$u_t=\frac{xu_x}{4t}\ln\left|x^{-5}u_x^{-3}u_{xx}+2x^{-6}u_x^{-2}\right|+xu_xF(t),$$

$$sl^4(2,\mathbb{R})\oplus\langle\partial_t\rangle:\quad u_t=x^{-2}\sqrt{4+x^6u_x^2}\,F(\omega),$$
$$\omega=(4+x^6u_x^2)^{-\frac32}(x^4u_{xx}+5x^3u_x+\tfrac12x^9u_x^3);$$

$$sl^5(2,\mathbb{R})\oplus\langle\partial_t\rangle:\quad u_t=x^{-2}\sqrt{|x^6u_x^2-4|}\,F(\omega),$$
$$\omega=|x^6u_x^2-4|^{-\frac32}(x^4u_{xx}+5x^3u_x-\tfrac12x^9u_x^3);$$

$$so^1(3)\oplus\langle\partial_t\rangle:\quad u_t=\sqrt{\sec^2x+u_x^2}\,F(\omega),$$
$$\omega=(1+u_x^2\cos^2x)^{-\frac32}[u_{xx}\cos x-(2+u_x^2\cos^2x)u_x\sin x];$$

$$sl^1(2,\mathbb{R})\oplus\langle\partial_u,x\partial_x+2u\partial_u\rangle:$$
$$u_t=\lambda x^2u_{xx}^2-2\lambda xu_xu_{xx}+\left(\lambda+\tfrac14\right)u_x^2,\quad \lambda\neq0;$$

$$sl^2(2,\mathbb{R})\oplus\langle -u\partial_u,\partial_u\rangle:$$
$$u_t=-\tfrac14x^{-1}u_x+\lambda x^{-3}u_x^{-1}(u_x^{-2}u_{xx}+3x^{-1}u_x^{-1})^{-2},\quad \lambda\neq0;$$

$$sl^3(2,\mathbb{R})\oplus\langle -t\partial_t-mx\partial_x,\partial_t\rangle:$$
$$u_t=\lambda xu_x|x^{-5}u_x^{-3}u_{xx}+2x^{-6}u_x^{-2}|^{\frac{1}{4m}},\quad \lambda\neq0,\quad m\neq0,\pm\tfrac34;$$

$$sl^3(2,\mathbb{R}) \oplus \langle t\partial_t, tx\partial_x\rangle :$$
$$u_t = \tfrac{xu_x}{4t} \ln\left|x^{-5}u_x^{-3}u_{xx} + 2x^{-6}u_x^{-2}\right| + \tfrac{\lambda x u_x}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{R};$$
$$sl^1(2,\mathbb{R}) \Subset \langle t\partial_x + (tx^{-1} - x)\partial_u, \partial_x + x^{-1}u\partial_u\rangle :$$
$$u_t = \lambda u_{xx} + 2\lambda x^{-2}u - 2\lambda x^{-1}u_x + x^{-1}uu_x - x^{-2}u^2, \quad \lambda \neq 0;$$
$$sl^1(2,\mathbb{R}) \Subset \langle (tu + x^2)\partial_x + 2(xu + tx^{-1}u^2)\partial_u, u\partial_x + 2x^{-1}u^2\partial_u\rangle :$$
$$u_t = x^{-1}uu_x - x^{-2}u^2 + \lambda x^{-2}(2u - xu_x) \times$$
$$\times (x^2u_{xx} + 2u - 2xu_x)^{-1}, \quad \lambda \neq 0;$$
$$sl^3(2,\mathbb{R}) \Subset \langle \partial_t, x\partial_x + \tfrac{4}{3}t\partial_t, x^{-1}\partial_u, -\partial_x + x^{-1}u\partial_u\rangle :$$
$$u_t = x^{-1}(xu_{xx} + 2u_x)^{\frac{1}{3}};$$
$$sl^3(2,\mathbb{R}) \Subset \langle \partial_t, \frac{4}{3}t\partial_t - x\partial_x, x^2u\partial_x, x^2\partial_x\rangle :$$
$$u_t = x^3u_x^2(xu_{xx} + 2u_x)^{-\frac{1}{3}}.$$

Висновки. Отже, для проведення повної групової класифікації залишається здійснити повний опис рівнянь другого класу, які допускають розв'язні групи локальних перетворень. Також слід відзначити, що поділ рівнянь вигляду (1) на два класи є природним, оскільки, як було відзначено в [31], рівняння другого класу можуть бути зведеними до квазілінійних рівнянь нелокальними замінами змінних, а рівняння першого класу – ні.

Нарешті, хотілося б відзначити, що значний вклад в розв'язування задачі групової класифікації рівнянь математичної фізики, як це зокрема, випливає з робіт [13, 14, 17, 21–25, 31–39], внесли українські математики з школи групового аналізу диференціальних рівнянь, яку в 70-х роках двадцятого століття започаткував Вільгельм Фущич, котрому у цьому році виповнюється 70 років зі дня народження.

[1] Bluman G.W., Cole J.D. Similarity methods for differential equations. – Berlin: Springer, 1974.

[2] Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. – New York: Academic Press, 1982.

[3] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. – New York: Springer, 1986.

[4] Blumen G., Kumei S. Symmetries and differential equations. – New York: Springer, 1989.

[5] Lie S. On integration of a class of linear partial differential equations by means of definite integrals // Arch. Math. – 1881. – **6**. – P. 328–368 (in German).

[6] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. – 1959. – **125**. – С. 492–495.

[7] Ibragimov N.H. (editor) CRC Handbook of Lie group to differential equations, Vol. 1. Symmetries, exact solutions and conservation laws. – Boca Raton: CRC Press, 1994.

[8] Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Групповая классификация уравнений нелинейной фильтрации // Докл. АН СССР. – 1987. – **293**. – С. 1033–1035.

[9] Oron A., Rosenau Ph. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. – 1986. – **118**. – P. 172–176.

[10] Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнений нелинейной теплопроводности с источником // Журн. выч. мат. и мат. физ. – 1982. – **22**. – С. 1393–1400.

[11] Edwards M.P. Classical symmetry reductions of nonlinear diffusion-convection equations // Phys. Lett. A. – 1994. – **190**. – P. 149–154.

[12] Yung C.M., Verburg K., Baveye P. Group classification and symmetry reductions of the non-linear diffusion-convection equation $u_t = (D(u)u_x)_x - K'(u)u_x$ // Int. J. Non–Linear Mech. – 1994. – **29**. – P. 273–278.

[13] Сєров М.І., Черніга Р.М. Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійних рівнянь теплопровідності з конвективним членом // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**. – С. 1262–1270.

[14] Cherniha R., Serov M. Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second–order evolution equations with convection terms // Euro. J. Appl. Math. – 1998. – **9**. – P. 527–542.

[15] Gandarias M.L. Classical point symmetries of a porous medium equation // J. Phys. A: Math. Gen. – 1996. – **29**. – P. 607–633.

[16] Катков В.Л. Групповая классификация решений уравнений Хопфа // Журн. прикл. мех. и техн. физ. – 1965. – № 6. – С. 105–106.

[17] Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion–convection equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – **37**. – P. 7547–7565.

[18] El-labany S.K., Elhanbaly A.M., Sabry R. Group classification and symmetry reduction of variable coefficient nonlinear diffusion-convection equation // J. Phys. A: Math. Gen. – 2002. – **35**. – P. 8055–8063.

[19] Pallikaros C., Sophocleous C. On point transformations of generalized nonlinear diffusion equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1995. – **28**. – P. 6459–6465.

[20] Cüngör F. Group classification and exact solutions of a radially symmetric porous-medium equation // Int J. Nonlinear Mech. – 2002. – **37**. – P. 245–255.

[21] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – **32**. – P. 7405–7418.

[22] Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. – 2001. – **69**. – P. 43–94.

[23] Zhdanov R.Z., Roman O.V. On preliminary symmetry classification of nonlinear Schrödinger equations with some applications to Doebner–Goldin model // Rep. Math. Phys.– 2000. – **45.**– P. 273–291.

[24] Güngor F., Lagno V.I., Zhdanov R.Z. Symmetry classification of KdV-type nonlinear evolution equations // J. Math. Phys. – 2004. – **45.** – P. 2280–2313.

[25] Lahno V., Zhdanov R. Group classification of nonlinear wave equations // J. Math. Phys. – 2005. – **46**, 053301. – 37 p.

[26] Barut A.O., Raczka R. Theory of group representations and applications. – Warszawa: PWN–Polish Scientific Publishers, 1977.

[27] Мубаракзянов Г.М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1963. – № 1(32). — С. 114–123.

[28] Patera J., Winternitz P. Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras // J. Math. Phys. – 1977. – **18**. – P. 1449–1455.

[29] Turkowski P. Low-dimensional real Lie algebras // J. Math. Phys. – 1988. – **29**. – P. 2139–2144.

[30] Магадеев Б.А. О групповой классификации нелинейных эволюционных уравнений // Алгебра и анализ. – 1993. – **5**. – С. 141–156.

[31] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of the general evolution equation: local and quasilocal symmetries // SIGMA. – 2005. – **1**, Paper 009. – 7 p.

[32] Nikitin A.G., Popovych R.O. Group classification of nonlinear Schrödinger equations // Ukr. Math. J. – 2001. – **53**. – P. 1255–1265.

[33] Nikitin A.G., Wiltshire R.J. Systems of reaction diffusion equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. – 2001. – **42**. – P. 1667–1668.

[34] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations // Ukr. Math. Bull. – 2005. – **2**. – P. 153–204.

[35] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. I. Generalized Landau–Ginzburg equations // J. Math. Anal. Appl. – 2006. – **324**. – P. 615–628.

[36] Boyko V., Popovych V. Group classification Galilei invariant equations of higher order / Group analytic methods in mathematical physics // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. – 2001. – **36**. – P. 45–50.

[37] Popovych R.O., Ivanova N.M., Eshraghi H. Group classification of (1 + 1)-dimensional Schrödinger equations with potentials and power nonlinearlities // J. Math. Phys. – 2004. – **45**. – P. 3045–3057.

[38] Cherniha R., King J.R. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems. I // J. Phys. A: Math. Gen. – 2000.– **33**. – P. 267–282.

[39] Cherniha R., King J.R. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems. II // J. Phys. A: Math. Gen. – 2003. – **36**. – P. 405–425.