Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 98–112

УДК 517.912:512.816

Редукція багатовимірних нелінійних рівнянь Даламбера до двовимірних рівнянь: анзаци, сумісність умов редукції, редуковані рівняння

І.А. ЄГОРЧЕНКО

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: iyegorch@imath.kiev.ua

Вивчені умови редукції багатовимірних хвильових рівнянь – системи з рівнянь Даламбера та Гамільтона. Доведені необхідні умови сумісності цих умов редукції. Описані можливі типи редукованих рівнянь та анзаців. Наведено короткий огляд літератури щодо сумісності системи рівнянь Даламбера та Гамільтона та побудови розв'язків нелінійного рівняння Даламбера.

We study conditions of reduction of multidimensional wave equations – of a system of d'Alembert and Hamilton equations. Necessary conditions for compatibility of such reduction conditions are proved. Possible types of the reduced equations and ansatzes are described. We also provide a brief review of the literature with respect to compatibility of the system of d'Alembert and Hamilton equations and construction of solutions for the nonlinear d'Alembert equation.

1. Вступ. У цій роботі продовжуються дослідження, розпочаті у 1990 р. у спільній роботі з В.І. Фущичем [1]. Ми досліджуємо редукцію нелінійного рівняння Даламбера

$$\Box u = F(u), \tag{1}$$
$$\Box \equiv \partial_{x_0}^2 - \partial_{x_1}^2 - \cdots - \partial_{x_n}^2, \quad u = u(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

за допомогою анзацу з двома новими незалежними змінними [2, 3]

$$u = \varphi(y, z), \tag{2}$$

де y, z – нові змінні. Тут і далі n – це кількість незалежних просторових змінних у вихідному рівнянні Даламбера.

Широкі класи точних розв'язків нелінійних рівнянь, що мають відповідні симетрійні властивості, можуть бути побудовані шляхом симетрійної редукції цих рівнянь до рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних або до звичайних диференціальних рівнянь (щодо відповідних алгоритмів та прикладів див. [4–7]).

Редукція та пошук розв'язків рівняння (1) шляхом симетрійної редукції або застосування анзаців розглядались, зокрема у роботах М. Таджірі [8], І. Патери, Р. Шарпа, П. Вінтерніца та Г. Цесенхауса [9], В.І. Фущича та М.І. Сєрова [10], В.І. Фущича, Л.Ф. Баранника та А.Ф. Баранника [11] (у [12] розглядається симетрійна редукція пуанкаре-інваріантних нелінійних рівнянь до двовимірних рівнянь).

У роботі В.І. Фущича, А.Ф. Баранника та Ю.Д. Москаленка [13] розглядається симетрійна редукція рівняння (1) з $F = u^k$ до двовимірних рівнянь, а також симетрія відповідних редукованих рівнянь.

Очевидно, що метод симетрійної редукції не дає вичерпного опису всіх точних розв'язків рівнянь, тому актуальним є пошук та розвиток інших алгоритмічних методів пошуку розв'язків. Одним з таких методів є редукція рівнянь за допомогою спеціальних підстановок – анзаців.

П. Кларксоном та М. Крускалом [14] був запропонований так званий "прямий метод" ("direct method") пошуку точних розв'язків нелінійних рівнянь у частинних похідних, і було продемонстровано, що цей метод дає більш широкі класи розв'язків, ніж метод симетрійної редукції за підалгебрами алгебр інваріантності рівняння (див. також [15, 16] та процитовані там роботи). Проте застосування цього методу для більшості рівнянь становить значні труднощі, тому що вимагає дослідження сумісності та розв'язання складних перевизначених систем рівнянь – умов редукції вихідного рівняння за допомогою обраного анзацу.

Розв'язки, що одержуються прямим методом, також пов'язані з симетрійними властивостями рівняння – Q-умовною симетрією цього рівняння [6, 17, 18] (симетрії такого типу також називаються некласичною або нелієвською симетрією [14, 19, 20]).

У роботі Р.З. Жданова, І.М. Цифри та Р.О. Поповича [21] встановлена еквівалентність некласичної (умовної) симетрії та прямого підходу (застосування анзацу) до редукції диференціальних рівнянь в частинних похідних. У статті В.І. Фущича "Анзац 95" [23] наведено огляд результатів з редукції для багатьох хвильових рівнянь. У роботі В.І. Фущича та А.Ф. Баранника [24] пропонується також варіант методу застосування анзаців для рівняння (1) з степеневою нелінійністю.

У роботі Дж. Чіконьї [22] проведено аналіз застосування різних типів умовної та некласичної симетрії для пошуку розв'язків нелінійних рівнянь у частинних похідних.

На відміну від алгоритмічного методу симетрійної редукції, метод прямої редукції з застосуванням анзаців або повний опис умовної симетрії (навіть Q-умовної симетрії) не можна назвати алгоритмічним у такій же мірі. Більшість робіт з застосування "прямого методу" стосується еволюційних рівнянь та інших рівнянь, які містять похідні не вище першого порядку для хоча б однієї з незалежних змінних, і число незалежних змінних у яких не більше трьох. У такому випадку розв'язання умов редукції є відносно простим.

Умови редукції є набагато складнішими для дослідження та розв'язання у випадку рівнянь, що містять другі та/або вищі похідні для всіх незалежних змінних, та багатовимірних рівнянь.

У цій роботі ми розглядаємо загальні умови редукції багатовимірного рівняння (1) за допомогою загального анзацу з двома новими незалежними змінними. Знайдені необхідні умови сумісності відповідних умов редукції – посилені умови, які були знайдені у [1]. Ми також описуємо відповідні можливі форми редукованих рівнянь. Таким чином, доведено, що редуковані рівняння можуть мати лише певний вигляд. Проте, одержані в цій роботі результати в загальному випадку не дозволяють провести повне застосування "прямого методу", для чого було б потрібно знайти загальний розв'язок умов редукції.

Аналогічна задача раніше розглядалась для анзаца з однією незалежною змінною

$$u = \varphi(y), \tag{3}$$

де y – нова незалежна змінна.

Аналіз сумісності системи Даламбера–Гамільтона

$$\Box u = F(u), \quad u_\mu u_\mu = f(u) \tag{4}$$

в тривимірному просторі був проведений Коллінзом в [31].

Розв'язки системи (4) досліджувались в роботах Г. Бейтмена [25], В.І. Смірнова та В.Л. Соболєва [26], М.П .Єругіна [27] (див. більш детальний огляд у [29, 30]).

У роботі [32] була знайдена умова сумісності системи (4) для $f(u) = 0$.

Для повного дослідження сумісності перевизначених систем диференціальних рівнянь з визначеною кількістю незалежних змінних може бути використаний алгоритм Картана [28], проте на практиці його дуже складно застосовувати вже для випадку трьох незалежних змінних, і неможливо – для довільної кількості незалежних змінних. Тому для таких випадків доводиться застосовувати спеціальні прийоми навіть для пошуку необхідних умов сумісності.

Очевидно, що систему Даламбера–Гамільтона (4) локальними перетвореннями можна привести до вигляду

$$\Box u = F(u), \quad u_\mu u_\mu = \lambda, \quad \lambda = 0, \pm 1. \tag{5}$$

Необхідні умови сумісності системи (5) для чотирьох незалежних змінних вивчались В.І. Фущичем та Р.З. Ждановим [33] (див. також [30]).

Пізніше В.І. Фущичем, Р.З. Ждановим та автором цієї роботи були знайдені необхідні умови сумісності системи (5) для довільної кількості незалежних змінних [34]:

Твердження 1. *Для того, щоб система* (5) *(n – довільне) була сумісною, необхідно, щоб функція F мала наступний вигляд:*

$$F = \frac{\lambda \partial_u \Phi}{\Phi}, \quad \partial_u^{n+1} \Phi = 0.$$

В.І. Фущичем, Р.З. Ждановим та І.В. Ревенком [29, 35, 36] був знайдений загальний розв'язок системи (5) для трьох просторових змінних (тобто чотирьох незалежних змінних), і необхідні та достатні умови сумісності цієї системи [35]:

Твердження 2. *Для того, щоб система* (5) $(u = u(x_0, x_1, x_2, x_3))$ *була сумісною, необхідно та достатньо, щоб функція F мала наступний вигляд:*

$$F = \frac{\lambda}{N(u + C)}, N = 0, 1, 2, 3.$$

Редукція рівняння (1) за допомогою анзаца (2) розглядалась В.І. Фущичем, Р.З. Ждановим та І.В. Ревенком у [36] для спеціального випадку (коли друга незалежна змінна входить у редуковане рівняння лише у якості параметру), і були описані всі відповідні анзаци для випадку чотирьох незалежних змінних, знайдені відповідні точні розв'язки. Деякі розв'язки такого типу для довільних n також розглядались А.Ф. Баранником та І.І. Юриком у [37].

У роботі Р.З. Жданова та О.А. Панчак [38] розглядалась редукція нелінійного рівняння Даламбера за допомогою анзаца $u = \phi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, для випадку $\Box\omega_1 = 0$, $\omega_{1\mu}\omega_{1\mu} = 0$ (тобто ω_1 входило у редуковане рівняння лише у якості параметру). Були досліджені відповідні умови сумісності та знайдені нові (неліївські) точні розв'язки.

Зазначимо, що цей випадок не включає повністю розглядуваний нами випадок анзацу з двома новими довільними незалежними змінними.

Рівняння Гамільтона може також розглядатись, безвідносно до задачі редукції, як додаткова умова до рівняння Даламбера, що дозволяє розширити симетрію цього рівняння. Симетрія системи

$$\Box u = F(u), \quad u_\mu u_\mu = 0$$

була описана у [39]. У [34] була знайдена конформна симетрія для системи (4), що є новою умовною симетрією для рівняння Даламбера. Умовні симетрії для відповідних розглянутих анзаців були описані також у [36, 38].

2. Необхідні умови сумісності системи рівнянь Даламбера–Гамільтона для двох функцій або для комплекснозначної функції. Спеціальне дослідження редукції багатовимірних рівнянь до двовимірних становить інтерес, тому що розв'язки двовимірних рівнянь в частинних похідних, в тому числі і нелінійних, можуть бути досліджені більш повно, ніж розв'язки багатовимірних рівнянь, проте такі рівняння можуть мати більш цікаві властивості, ніж звичайні диференціальні рівняння.

Наприклад, нехай $y_\mu y_\mu = -z_\mu z_\mu = 1$, $z_\mu y_\mu = \Box y = \Box z = 0$. Тоді рівняння (6) має вигляд

$$\varphi_{yy} - \varphi_{zz} = F(\varphi).$$

Якщо $F(\varphi) = \sin\varphi$, то редуковане рівняння має солітонні розв'язки. Якщо $F(\varphi) = \exp\varphi$, воно має загальний розв'язок. Двовимірні редуковані рівняння також можуть мати цікаві властивості з точки зору умовної симетрії.

Підстановка анзацу (2) у рівняння (1) приводить до наступного рівняння:

$$\varphi_{yy}y_\mu y_\mu + 2\varphi_{yz}z_\mu y_\mu + \varphi_{zz}z_\mu z_\mu + \varphi_y \Box y + \varphi_z \Box z = F(\varphi) \tag{6}$$
$$\left(y_\mu = \frac{\partial y}{\partial x_\mu}, \ \ \varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right),$$

звідки одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} &y_\mu y_\mu = r(y,z), \quad y_\mu z_\mu = q(y,z), \quad z_\mu z_\mu = s(y,z), \\ &\Box y = R(y,z), \quad \Box z = S(y,z). \end{aligned} \tag{7}$$

Система (7) є умовою редукції багатовимірного хвильового рівняння (1) до двовимірного рівняння (6) за допомогою анзаца (2).

Систему рівнянь (7), в залежності від знаку виразу $rs - q^2$, локальними перетвореннями можна звести до одного з чотирьох типів:

1) еліптичний випадок: $rs-q^2 > 0$, $v = v(y,z)$ – комплекснозначна функція,

$$\begin{aligned} &\Box v = V(v, v^*), \quad \Box v^* = V^*(v, v^*), \\ &v^*_\mu v_\mu = h(v, v^*), \quad v_\mu v_\mu = 0, \quad v^*_\mu v^*_\mu = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

(редуковане рівняння еліптичного типу);

2) гіперболічний випадок: $rs - q^2 < 0$, $v = v(y,z)$, $w = w(y,z)$ – дійсні функції,

$$\begin{aligned} &\Box v = V(v, w), \quad \Box w = W(v, w), \\ &w_\mu w_\mu = h(v, w), \quad v_\mu v_\mu = 0, \quad w_\mu w_\mu = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

(редуковане рівняння гіперболічного типу);

3) параболічний випадок: $rs - q^2 = 0$, $r^2 + s^2 + q^2 \neq 0$, $v(y,z)$, $w(y,z)$ – дійсні функції,

$$\begin{aligned} &\Box v = V(v, w), \quad \Box w = W(v, w), \\ &v_\mu w_\mu = 0, \quad v_\mu v_\mu = \lambda \ (\lambda = \pm 1), \quad w_\mu w_\mu = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

(якщо $W \neq 0$, то редуковане рівняння параболічного типу);

4) рівняння першого порядку $r = s = q = 0$, $y \to v$, $z \to w$

$$v_\mu v_\mu = w_\mu w_\mu = v_\mu w_\mu = 0,$$

$$\Box v = V(v,w), \quad \Box w = W(v,w). \tag{11}$$

Сформулюємо необхідні умови сумісності систем (8)–(11).

Теорема 1. *Система* (8) *сумісна тільки в тому випадку, коли*

$$V = \frac{h(v,v^*)\partial_{v^*}\Phi}{\Phi}, \quad \partial_{v^*} \equiv \frac{\partial}{\partial v^*},$$

де Φ *– довільна функція, для якої виконується умова*

$$(h\partial_{v^*})^{n+1}\Phi = 0.$$

Функцію h можна представити у вигляді $h = \frac{1}{R_{vv^*}}$, де R – довільна достатньо гладка функція, R_v, R_{v^*} – частинні похідні по відповідним змінним.

Тоді функцію Φ можна представити у вигляді $\Phi = \sum\limits_{k=0}^{n+1} f_k(v)R_v^k$, де $f_k(v)$ – довільні функції, і

$$V = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} k f_k(v)R_v^k}{\sum\limits_{k=0}^{n+1} f_k(v)R_v^k}.$$

Відповідне редуковане рівняння матиме вигляд

$$h(v,v^*)\left(\phi_{vv^*} + \phi_v\frac{\partial_{v^*}\Phi}{\Phi} + \phi_{v^*}\frac{\partial_v\Phi^*}{\Phi^*}\right) = F(\phi). \tag{12}$$

Рівняння (12) можна переписати також як рівняння з двома дійсними незалежними змінними ($v = \omega + \theta$, $v^* = \omega - \theta$):

$$2\widetilde{h}(\omega,\theta)(\phi_{\omega\omega} + \phi_{\theta\theta}) + \Omega(\omega,\theta)\phi_\omega + \Theta(\omega,\theta)\phi_\theta = F(\phi). \tag{13}$$

Ми не будемо наводити складні вирази для Ω, Θ, які можуть бути знайдені з (12).

Теорема 2. *Система* (9) *сумісна тільки в тому випадку, коли*

$$V = \frac{h(v,w)\partial_w\Phi}{\Phi}, \quad W = \frac{h(v,w)\partial_v\Psi}{\Psi},$$

де функції Φ, Ψ *задовольняють умовам*

$$(h\partial_v)^{n+1}\Psi = 0, \quad (h\partial_w)^{n+1}\Phi = 0.$$

Функцію h можна представити у вигляді $h = \frac{1}{R_{vw}}$, де R – довільна достатньо гладка функція, R_v, R_w – частинні похідні по відповідним змінним. Тоді функції Φ, Ψ можна представити у вигляді

$$\Phi = \sum_{k=0}^{n+1} f_k(v) R_v^k, \quad \Psi = \sum_{k=0}^{n+1} g_k(w) R_w^k,$$

де $f_k(v)$, $g_k(w)$ – довільні функції, і

$$V = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} k f_k(v) R_v^k}{\sum\limits_{k=0}^{n+1} f_k(v) R_v^k}, \quad W = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} k g_k(w) R_w^k}{\sum\limits_{k=0}^{n+1} g_k(w) R_w^k}.$$

Відповідне редуковане рівняння матиме вигляд

$$h(v,w)\left(\phi_{vw} + \phi_v \frac{\partial_w \Phi}{\Phi} + \phi_w \frac{\partial_v \Psi}{\Psi}\right) = F(\phi). \tag{14}$$

Теорема 3. *Система* (10) *сумісна тільки в тому випадку, коли*

$$V = \frac{\lambda \partial_v \Phi}{\Phi}, \quad \partial_v^{n+1}\Phi = 0, \quad W \equiv 0.$$

Ми не можемо редукувати рівняння (1) за допомогою анзаца (2) до параболічного рівняння – у цьому випадку одна з змінних буде входити як параметр до редукованого звичайного диференціального рівняння першого порядку.

Сумісність та розв'язки таких системи для $n = 3$ були розглянуті у [36]; для цього випадку були знайдені необхідні та достатні умови сумісності та загальний розв'язок.

Система (11) сумісна тільки в тому випадку, коли $V = W \equiv 0$, тобто редуковане рівняння може бути лише алгебраїчним рівнянням $F(u)$=0. Таким чином, ми не можемо редукувати рівняння (1) за допомогою анзаца (2) до рівняння першого порядку.

Доведення цих теорем проводиться із застосуванням лем, аналогічних наведеним у [33, 34], та відомої теореми Гамільтона–Келі, згідно з якою матриця є коренем свого характеристичного полінома.

Ми наведемо короткий напис доведення для теореми 2 для гіперболічного випадку. Для інших випадків доведення є аналогічним.

Ми будемо оперувати з матрицями розмірності $(n+1)\times(n+1)$ других похідних функцій v та w:

$$\hat{V} = \{v_{\mu\nu}\}, \quad \hat{W} = \{w_{\mu\nu}\}.$$

Щодо операцій з цими матрицями ми використовуємо звичайні для простору Мінковського позначення та домовленості щодо підсумовування: $v_0 = i\partial_{x_0}$, $v_a = -i\partial_{x_a} (a = 1, \dots, n)$, $v_\mu v_\mu = v_0^2 - v_1^2 - \cdots - v_n^2$.

Лема 1. *Якщо функції v та w є розв'язками системи* (9), *для будь-якого k для них виконуються співвідношення*

$$\mathrm{tr}\hat{V} = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}(h(v,w)\partial_w)^{k+1}V(v,w),$$
$$\mathrm{tr}\hat{W} = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}(h(v,w)\partial_v)^{k+1}W(v,w).$$

Лема 2. *Якщо функції v та w є розв'язками системи* (9), $\det\hat{V} = 0$, $\det\hat{W} = 0$.

Лема 3. *Нехай $M_k(\hat{V})$ – сума головних мінорів порядку k для матриці $\hat{V}$. Якщо функції v та w є розв'язками системи* (9), *для будь-якого k для них виконуються співвідношення*

$$M_k(\hat{V}) = \frac{(h(v,w)\partial_w)^k\Phi}{k!\Phi}, \quad M_k(\hat{W}) = \frac{(h(v,w)\partial_v)^k\Psi}{k!\Psi},$$

де функції Φ, Ψ задовольняють умовам

$$(h\partial_v)^{n+1}\Psi = 0, \quad (h\partial_w)^{n+1}\Phi = 0.$$

Ці леми можуть бути доведені методом математичної індукції аналогічно [34] з використанням теореми Гамільтона–Келі (E – одинична матриця розмірності $(n+1)\times(n+1)$).

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k M_k\hat{V}^{n-k} + (-1)^n E\det\hat{V} = 0.$$

Очевидно, що твердження теореми 2 є прямим наслідком леми 3 для $k = 1$.

Зауваження 1. Рівняння (8) можна переписати для пари дійсних функцій $\omega = \mathrm{Re}\, v$, $\theta = \mathrm{Im}\, v$. Проте в цьому випадку необхідні умови сумісності мають дуже громіздкий вигляд.

Зауваження 2. Перехід від (7) до (8)–(11) зручний тільки з точки зору дослідження сумісності. Знак виразу $rs - q^2$ може змінюватись для різних y, z і перехід розглядається тільки в області, де цей знак постійний.

3. Приклади розв'язків системи рівнянь Даламбера–Гамільтона. Наведемо явні розв'язки систем типу (7) і відповідні редуковані рівняння. Параметри a_μ, b_μ, c_μ, d_μ ($\mu = \overline{0,3}$) задовольняють умовам:

$$-a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = -1 \quad (a^2 \equiv a_0^2 - a_1^2 - \cdots - a_3^2),$$
$$ab = ac = ad = bc = bd = cd = 0;$$

y, z – функції від x_0, x_1, x_2, x_3.

1) $\quad y = ax, \quad z = dx, \quad \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = F(\varphi);$

2) $\quad y = ax, \quad z = \left((bx)^2 + (cx)^2 + (dx)^2\right)^{1/2},$

$$\varphi_{yy} - \varphi_{zz} - \frac{2}{z}\varphi_z = F(\varphi).$$

У цьому випадку редуковане рівняння є так званим радіальним хвильовим рівнянням, симетрія та розв'язки якого досліджуються у [44, 45].

3) $\quad y = bx + \Phi(ax + dx), \quad z = cx, \quad -\varphi_{zz} - \varphi_{yy} = F(\varphi);$

4) $\quad y = \left((bx)^2 + (cx^2)\right)^{1/2}, \quad z = ax + dx, \quad -\varphi_{yy} - \dfrac{1}{y}\varphi_y = F(\varphi).$

Умовна симетрія та розв'язки різних нелінійних двовимірних хвильових рівнянь, які можуть виникати як редуковані рівняння для рівняння (1), розглянуті у [42–46]. З цих робіт також можна бачити, що симетрія двовимірних редукованих рівнянь часто є ширшою, ніж симетрія вихідного рівняння, тобто редукція до двовимірних рівнянь дає можливість знаходження нових неліївських розв'язків.

4. Висновки. Результати з дослідження сумісності та розв'язки систем (8)–(11) можуть використовуватись для дослідження та пошуку розв'язків також інших пуанкаре-інваріантних хвильових рівнянь, крім рівняння Даламбера, наприклад, рівняння Дірака та рівнянь Максвелла для векторного потенціалу.

Будь-яке багатовимірне рівняння, інваріантне відносно алгебри Пуанкаре (такі рівняння для скалярних функцій описані в роботі В.І. Фущича та автора [47]), може бути редуковане за допомогою анзаца (2) до двовимірного рівняння за умови, якщо y та z задовольняють умовам редукції (7).

Таким чином, у цій роботі

1) знайдено необхідні умови сумісності для системи рівнянь Даламбера–Гамільтона для двох залежних функцій, тобто умов редукції нелінійного багатовимірного рівняння Даламбера за допомогою анзаца (2) до двовимірного рівняння; такі умови сумісності для рівнянь довільної розмірності не можуть бути знайдені за рахунок стандартної процедури;
2) знайдено можливі типи двовимірних редукованих рівнянь, які можуть бути одержані з рівняння (1) за допомогою анзаца (2).

Знайдені умови редукції та типи анзаців можуть бути використані також для довільного пуанкаре-інваріантного багатовимірного рівняння.

Досить часто у своїх роботах, разом з новими результатами та ідеями, В.І. Фущич наводив переліки задач, які можуть розвивати одержані результати. Підтримуючи цю традицію, я також хочу навести перелік наступних задач, які можуть розвивати представлені в цій роботі дослідження.

1. Дослідження лиївської та умовної симетрії системи умов редукції (7) (симетрія системи рівнянь Даламбера для комплексної функції досліджувалась у [49]).
2. Дослідження лиївської та умовної симетрії редукованих рівнянь (12) та (14), а також можливих редукованих рівнянь першого порядку. Знаходження точних розв'язків редукованих рівнянь.
3. Зв'язок групи еквівалентності класу редукованих рівнянь з симетрією вихідного рівняння.
4. Групова класифікація редукованих рівнянь.
5. Знаходження достатніх умов сумісності та загального розв'язку умов сумісності (7) для менших розмірностей ($n = 2, 3$).
6. Знаходження та дослідження умов сумісності та класів редукованих рівнянь для інших типів рівнянь, зокрема, для пуанкаре-інваріантних скалярних рівнянь.

Я хочу подякувати Р.З. Жданову за корисні коментарі та посилання.

[1] Фущич В.І., Єгорченко І.А. Про редукцію багатовимірного нелінійного хвильового рівняння до двовимірних рівнянь // Доповіді АН УРСР, Сер. А, фіз.-мат. і техн. науки. – 1990. – № 8. – С. 32–34 (див. math-ph/0610020).

[2] Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики / Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 6–28.

[3] Grundland A., Harnad J., Winternitz P. Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations // J. Math. Phys. – 1984. – **25**. – P. 791–807.

[4] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.

[5] Olver P. Application of Lie groups to differential equations. – New York: Springer Verlag, 1987.

[6] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.
Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I. Symmetry analysis and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Publishers, 1993.

[7] Bluman G.W., Kumei S. Symmetries and differential equations. – New York: Springer Verlag, 1989.

[8] Tajiri M. Some remarks on similarity and soliton solutions of nonlinear Klein–Gordon equations // J. Phys. Soc. Japan. – 1984. – **53**. – P. 3759–3764.

[9] Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., Subgroups of the Poincaré group and their invariants // J. Math. Phys. – 1976. – **17**. – P. 977–985.

[10] Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equation // J. Phys. A: Math. Gen. – 1983. – **16**. – P. 3645–3656.

[11] Фущич В.І., Баранник А.Ф. Про точні розв'язки нелінійного рівняння Даламбера у просторі Мінковського $R(1,n)$ // Доповіді НАН України, Сер. А. – 1990. – № 6. – С. 31–34.
Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений – Киев: Наук. думка, 1991. – 304 с.
Фущич В.И., Баранник А.Ф. Максимальные подалгебры ранга $n > 1$ алгебры $AP(1,n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**. – С. 1250–1256.
Фущич В.И., Баранник А.Ф. Максимальные подалгебры ранга $n > 1$ алгебры $AP(1,n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. II // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**. – С. 1693–1700.

[12] Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф., Фущич В.И. Редукция многомерного пуанкаре-инвариантного нелинейного уравнения к двумерным уравнениям // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**. – С. 1311–1323.

[13] Фущич В.І., Баранник А.Ф., Москаленко Ю.Д. Про нові точні розв'язки багатовимірного нелінійного рівняння Даламбера // Доповіді НАН України. – 1995. – № 2. – С. 33–37.

[14] Clarkson P.A., Kruskal M. New similarity reductions of the Boussinesq equations // J. Math. Phys. – 1989. – **30**. – P. 2201–2213.

[15] Clarkson P.A., Mansfield E.L. Algorithms for the nonclassical method of symmetry reductions // SIAM J. Appl. Math. – 1994. – **54**. – P. 1693–1719 (see solv-int/9401002).

[16] Olver P. Direct reduction and differential constraints // Proc. Roy. Soc. London A. – 1994. – **444**. – P. 509–523.

[17] Фущич В.И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? / Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Ин–т математики АН УССР, 1987. – С. 4–16.

[18] Фущич В. І., Жданов Р.З. Умовна симетрія та редукція диференціальних рівнянь в частинних похідних // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**. – С. 970–982.

[19] Olver P.J., Rosenau P. The construction of special solutions to partial differential equations // Phys. Lett. A. – 1986. – **114**. – P. 107–112.

[20] Levi D., Winternitz P. Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989. – **22**. – P. 2915–2924.

[21] Zhdanov R.Z., Tsyfra I.M., Popovych R.O. A precise definition of reduction of partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – **238**. – P. 101–123.

[22] Cicogna G. A discussion on the different notions of symmetry of differential equations // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. – 2004. – **50**, Part 1. – P. 77–84.

[23] Fushchych W.I. Ansatz–95 // J. Nonlinear Math. Phys. – 1995. – **2**. – P. 216–235.

[24] Фущич В.І., Баранник А.Ф. Про новий метод побудови розв'язків нелінійних хвильових рівнянь // Доповіді НАН України. – 1996. – № 10. – С. 48–51.

[25] Bateman H. Partial differential equations of mathematical physics. – Cambridge: Univ. Press, 1922.
Bateman H. Mathematical analysis of electrical and optical wave-motion. – New York: Dover, 1955.

[26] Смирнов В.И., Соболев С.Л. Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний // Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР. – 1932. – **20**. – С. 37–40.
Смирнов В.И., Соболев С.Л. О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии // Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР. – 1933. – **29**. – С. 43–51.
Соболев С.Л. Функционально-инвариантные решения волнового уравнения // Тр. физ.-мат. ин–та им. В.А. Стеклова. – 1934. – **5**. – С. 259–264.

[27] Еругин Н.П. О функционально-инвариантных решениях // Доклады АН СССР. – 1944. – **5**. – С. 385–386.

[28] Cartan E. Oeuvres completes. V. 1–6. – Paris: Gauthier-Villars, 1952–1955.

[29] Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В. Общие решения нелинейного волнового уравнения и уравнения эйконала // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**. – С. 1471–1486.

[30] Фущич В.И., Жданов Р.З. Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения. – Киев: Наук. думка, 1992, 228 с.
Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. Symmetries of nonlinear Dirac equations. – Kyiv, Mathematical Ukraina Publishers, 1997. – 384 p.

[31] Collins S.B. Complex potential equations. I // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1976. – **80**. – P. 165–187.
Collins S.B. All solutions to a nonlinear system of complex potential equations // J. Math. Phys. – 1980. – **21**. – P. 240–248.

[32] Cieciura G., Grundland A. A certain class of solutions of the nonlinear wave equation // J. Math. Phys. – 1984. – **25**. – P. 3460–3469.

[33] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. On some new exact solutions of the nonlinear d'Alembert–Hamilton system // Phys. Lett. A. – 1989. – **141**, N 3–4, 113–115.

[34] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Yegorchenko I.A. On reduction of the nonlinear many-dimensional wave equations and compatibility of the d'Alembert–Hamilton system // J. Math. Anal. Appl. – 1991. – **160**. – P. 352–360.

[35] Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В. Совместность и решения нелинейных уравнений Даламбера и Гамильтона. – 1990. – 65 с. (Препр. / АН УССР. – Киев: Ин-т математики. – 90.39).

[36] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Revenko I.V. On the general solution of the d'Alembert equation with a nonlinear eikonal constraint and its applications // J. Math. Phys. – 1995. – **36**. – P. 7109–7127.

[37] Barannyk A., Yuryk I. On some exact solutions of nonlinear wave equations // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (July 7–13, 1997, Kyiv). – Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. – **1**. – P. 98–107.

[38] Zhdanov R., Panchak O. New conditional symmetries and exact solutions of the nonlinear wave equation // J. Phys. A: Math. Gen. – 1998. – **31**. – P. 8727–8734.

[39] Шульга М.В. Симметрия и некоторые точные решения уравнения Даламбера с нелинейным условием / Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. – Киев: Ин–т математики АН УССР, 1985. – С. 36–38.

[40] Fushchych W.I., Tsyfra I.M. On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. – **20**. – L45–L48.

[41] Фущич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность нелинейных уравнений Даламбера, Лиувилля, Борна–Инфельда и Монжа–Ампера относительно конформной алгебры / Симметрийный анализ и рещения уравнений математической физики. – Киев: Ин–т математики АН УССР, 1988. – С. 98–102

[42] Єгорченко I.А., Воробйова А.I. Умовна інваріантність та точні розв'язки рівняння Клейна–Гордона–Фока // Доповіді НАН України. – 1992. – № 3. – С. 19–22.

[43] Euler M., Euler N. Symmetries for a class of explicitly space- and time-dependent (1+1)-dimensional wave equations // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – **1**. – P. 70–78.

[44] Anco S.C., Liu S. Exact solutions of semilinear radial wave equations in n dimensions // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – **297**. – P. 317–342 (see math-ph/0309049).

[45] Yehorchenko I.A., Vorobyova A.I. Sets of conditional symmetry operators and exact solutions for wave and generalised heat equations // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. – 2004. – **50**, Part 1. – P. 298–303 (see math-ph/0304029).

[46] Cicogna G., Ceccherini F., Pegoraro F. Applications of symmetry methods to the theory of plasma physics // SIGMA. – 2006. – **2**, Paper 017. – 17 p.

[47] Fushchych W.I., Yegorchenko I.A. Second-order differential invariants of the rotation group $O(n)$ and of its extension $E(n)$, $P(l,n)$ // Acta Appl. Math. – 1992. – **28**. – P. 69–92.

[48] Zhdanov R.Z. On conditional symmetries of multidimensional nonlinear equations of quantum field theory / Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (July 7–13, 1997, Kyiv). – Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. – **1**. – P. 53–61.

[49] Fushchych W.I., Yegorchenko I.A. The symmetry and exact solutions of the nonlinear d'Alembert equation for complex fields // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989. – **22**. – P. 2643–2652.