Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 92–97

УДК 517.912:512.816

Симетрійні властивості та деякі точні розв'язки узагальненого рівняння Бюргерса

А.А. ГЕВЛЕНКО

Полтавський нац. технічний університет ім. Юрія Кондратюка
E-mail: kaf26@pntu.poltava.ua

Проведено класифікацію симетрійних властивостей одного з можливих узагальнень рівняння Бюргерса на випадок двох просторових змінних в залежності від вигляду нелінійності та знайдено деякі його точні розв'язки.

Depending on the type of nonlinearity we classify the symmetric properties of one of the possible generalizations of Burgers equation in two-dimensional space. Some exact solution of equations under consideration are found.

1. Вступ. Як відомо, коло питань математичної фізики тісно пов'язане з вивченням різних фізичних процесів. Сюди відносять явища, що вивчають у гідродинаміці, теорії пружності, електродинаміці, фізиці елементарних частинок і т.д. Математичні задачі, що виникають при цьому, часто зводяться до розв'язування диференціальних рівнянь різних типів, в тому числі диференціальних рівнянь з частинними похідними другого і вище порядків. Диференціальні рівняння, що описують конкретні фізичні процеси, як правило, мають широку симетрію. Наявність симетрії може бути одним з критеріїв вибору серед деякої множини рівнянь оптимальної математичної моделі, що максимально точно описує даний процес. Великі можливості класифікації симетрій та побудови точних розв'язків рівнянь математичної фізики відкривають започатковані ще у XIX столітті Софусом Лі методи теоретико-групового аналізу диференціальних рівнянь. Оператори алгебри інваріантності диференціальних рівнянь застосовуються (див. [1]) для побудови підстановок спеціальної форми (анзаців), які зводять (редукують) дане рівняння до диференціальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних. Класичні методи Лі, доповнені результатами теорії представлень груп і алгебр Лі, знаходять все ширше застосування в теоретичній та математичній фізиці.

2. Симетрійна класифікація. Розглянемо класичне рівняння Бюргерса

$$u_0 = u_{11} + uu_1, \tag{1}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1)$, $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, $\mu = \overline{0,1}$, та узагальнимо його на випадок двох просторових змінних наступним чином

$$u_0 = u_{11} + u_{22} + F(u)(u_1 + u_2), \tag{2}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2)$, $F = F(u)$ – довільна гладка функція.

Поставимо задачу дослідити симетрійні властивості рівняння (2) в залежності від вигляду функції $F(u)$.

Надалі будемо вважати $F \neq \lambda$ ($\lambda = \text{const}$) так як при $F = \lambda$ рівняння

$$u_0 = u_{11} + u_{22} + \lambda(u_1 + u_2)$$

заміною $t = x_0$, $y_1 = x_1 + \lambda x_0$, $y_2 = x_2 + \lambda x_0$, $w = u$ зводиться до рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2}.$$

Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Максимальні алгебри інваріантності (МАІ) рівняння (2) в залежності від вигляду функції $F(u)$ наведені в таблиці 1.*

Доведення теореми проводиться за допомогою стандартного методу Лі (див. [1, 2]).

3. Деякі точні розв'язки. Проведемо процедуру симетрійної редукції та знаходження деяких точних розв'язків рівняння (2) для випадку функції $F(u) = e^u$:

$$u_0 = u_{11} + u_{22} + e^u(u_1 + u_2). \tag{3}$$

Оскільки елементи МАІ рівняння (3) задовольняють наступним комутаційним співвідношенням

$$[P_0, P_a] = 0, \quad [P_0, D_1] = 2P_0, \quad [P_a, D_1] = P_a,$$

Таблиця 1. Результат симетрійної класифікації рівняння (2).

№	Вигляд рівняння	МАІ
1	$u_0 = u_{11} + u_{22} + f(u)(u_1 + u_2)$	$P_0 = \partial_0,\ P_a = \partial_a$
2	$u_0 = u_{11} + u_{22} + e^u(u_1 + u_2)$	$P_0,\ P_a$
		$D_1 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - \partial_u$
3	$u_0 = u_{11} + u_{22} + \ln u(u_1 + u_2)$	$P_0,\ P_a,$
		$G_1 = x_0(\partial_1 + \partial_2) - u\partial_u$
4	$u_0 = u_{11} + u_{22} + u^k(u_1 + u_2)$	$P_0, P_a,$
		$D_2 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - \frac{1}{k}u\partial_u$
5	$u_0 = u_{11} + u_{22} + u(u_1 + u_2)$	$P_0,\ P_a,$
		$G_2 = x_0(\partial_1 + \partial_2) - \partial_u,$
		$D_3 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - u\partial_u$

В таблиці 1 k – довільна стала, $k \neq 0; 1$, $f = f(u)$ – довільна гладка функція, $a = \overline{1,2}$.

де $a = 1, 2$, то з точністю до спряженості відносно групи автоморфізмів виділимо класи підалгебр розмірностей 1 і 2 [3]. За кожною з підалгебр МАІ здійснимо процедуру симетрійної редукції [1, 3]. Отримані результати наведемо в таблиці 2.

Для підалгебри $\langle P_1 + \alpha_2 P_2 \rangle$ редуковане рівняння при $\alpha_2 = 1$ зводиться до лінійного рівняння теплопровідності

$$\varphi_1 = 2\varphi_{22}. \tag{4}$$

Таким чином функція

$$u = \varphi(x_0, x_1 - x_2)$$

є розв'язком рівняння (3), якщо φ – довільний розв'язок лінійного рівняння (4).

Розглянемо редуковане рівняння

$$(1 + \alpha_2^2)\ddot{\varphi} + (1 - \alpha_2)e^{\varphi}\dot{\varphi} - \alpha_1\alpha_2\dot{\varphi} = 0. \tag{5}$$

Проінтегрувавши дане рівняння, одержимо

$$(1 + \alpha_2^2)\dot{\varphi} + (1 - \alpha_2)e^{\varphi} - \alpha_1\alpha_2\varphi - C_1 = 0. \tag{6}$$

Таблиця 2. Симетрійна редукція рівняння (3).

Підалгебра MAI	Анзац	Редуковане рівняння
$\langle P_0+\alpha_1P_1+\alpha_2P_2\rangle$	$u=\varphi(\omega_1,\omega_2)$, $\omega_a=x_a-\alpha_ax_0$	$\varphi_{11}+\varphi_{22}+e^{\varphi}(\varphi_1+\varphi_2)+$ $+\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2=0$
$\langle P_1+\alpha_2P_2\rangle$	$u=\varphi(\omega_1,\omega_2)$, $\omega_1=x_0$, $\omega_2=x_2-\alpha_2x_1$	$(1+\alpha_2^2)\varphi_{22}+$ $+(1-\alpha_2)e^{\varphi}\varphi_2-\varphi_1=0$
$\langle D_1\rangle$	$u=\varphi(\omega_1,\omega_2)-\frac{1}{2}\ln x_0$, $\omega_a=\frac{x_a}{\sqrt{x_0}}$	$\varphi_{11}+\varphi_{22}+\frac{1}{2}(\omega_a\varphi_a+1)+$ $+e^{\varphi}(\varphi_1+\varphi_2)=0$
$\langle P_0+\alpha_1P_1, P_1+\alpha_2P_2\rangle$	$u=\varphi(\omega)$, $\omega=\alpha_1\alpha_2x_0-\alpha_2x_1+x_2$	$(1+\alpha_2^2)\ddot\varphi+$ $+(1-\alpha_2)e^{\varphi}\dot\varphi-\alpha_1\alpha_2\dot\varphi=0$
$\langle P_1,P_2\rangle$	$u=\varphi(\omega)$, $\omega=x_0$	$\dot\varphi=0$
$\langle D_1,\ P_0\rangle$	$u=\varphi(\omega)-\ln x_2$, $\omega=\frac{x_1}{x_2}$	$(1+\omega^2)\ddot\varphi+$ $+e^{\varphi}((1-\omega)\dot\varphi-1)+1=0$
$\langle D_1,P_1+\alpha_2P_2\rangle$	$u=\varphi(\omega)-\frac{1}{2}\ln x_0$, $\omega=\frac{\alpha_2x_1-x_2}{\sqrt{x_0}}$	$(\alpha_2^2+1)\ddot\varphi+$ $+((\alpha_2-1)e^{\varphi}+\frac{1}{2}\omega)\dot\varphi+\frac{1}{2}=0$

Після відокремлення змінних рівняння (6) перепишеться так

$$\frac{d\varphi}{(\alpha_2-1)e^{\varphi}+\alpha_1\alpha_2\varphi+C_1}=\frac{d\omega}{\alpha_2^2+1}. \tag{7}$$

Інтеграл рівняння (7)

$$\int_0^u\frac{d\varphi}{(\alpha_2-1)e^{\varphi}+\alpha_1\alpha_2\varphi+C_1}=\frac{\alpha_1\alpha_2x_0-\alpha_2x_1+x_2}{\alpha_2^2+1}$$

залежить від значень α_1, α_2, C_1. Можливі наступні суттєво різні випадки:

$$1)\ \alpha_2=0\to\frac{d\varphi}{-e^{\varphi}+C_1}=d\omega:$$

$$A)\ C_1=0\to\frac{d\varphi}{-e^{\varphi}}=d\omega\to e^{-\varphi}=\omega+C_2\to\varphi=\ln\frac{1}{\omega+C_2}\to$$

$$\to u=\ln\frac{1}{x_2+C_2};$$

$$B)\ C_1 \neq 0 \to \frac{d\varphi}{-e^{\varphi}+C_1} = d\omega \to \frac{d\varphi}{-e^{\varphi}(1-C_1e^{-\varphi})} = d\omega \to$$

$$\to \frac{d(e^{-\varphi})}{e^{-\varphi}-\frac{1}{C_1}} = -C_1 d\omega \to e^{-\varphi} = \frac{C_2}{C_1}e^{-C_1\omega} + \frac{1}{C_1} \to$$

$$\to \varphi = \ln\frac{C_1}{C_2e^{-C_1\omega}+1} \to u = \ln\frac{C_1}{C_2e^{-C_1x_2}+1};$$

$$2)\ \alpha_2 = 1 \to \frac{2d\varphi}{\alpha_1\varphi + C_1} = d\omega :$$

$$A)\ \alpha_1 = 0 \to \frac{2d\varphi}{C_1} = d\omega :$$

$$a)\ C_1 = 0 \to \varphi = const \to u = \mathrm{const};$$

$$b)\ C_1 \neq 0 \to \varphi = \frac{C_1}{2}\omega + C_2 \to u = \frac{C_1}{2}(x_2 - x_1) + C_2;$$

$$B)\ \alpha_1 \neq 0 \to \frac{2d\varphi}{\alpha_1(\varphi + \frac{C_1}{\alpha_1})} = d\omega \to \varphi = C_2e^{\frac{\alpha_1}{2}\omega} - \frac{C_1}{\alpha_1} \to$$

$$\to u = C_2e^{\frac{\alpha_1}{2}(\alpha_1x_0 - x_1 + x_2)} - \frac{C_1}{\alpha_1};$$

$$3)\ \alpha_1 = 0 \to \frac{d\varphi}{(\alpha_2-1)e^{\varphi}+C_1} = \frac{d\omega}{\alpha_2^2+1} :$$

$$A)\ \alpha_2 = 1 \to d\varphi = \frac{C_1}{2}d\omega \to \varphi = \frac{C_1}{2}\omega + C_2 \to$$

$$\to u = \frac{C_1}{2}(x_2 - x_1) + C_2;$$

$$B)\ \alpha_2 \neq 1 \to \frac{d\varphi}{(\alpha_2-1)e^{\varphi}+C_1} = \frac{d\omega}{\alpha_2^2+1} :$$

$$a)\ C_1 = 0 \to \frac{d\varphi}{e^{\varphi}} = \frac{\alpha_2-1}{\alpha_2^2+1}d\omega \to \varphi = \ln\frac{1}{\frac{1-\alpha_2}{1+\alpha_2^2}\omega + C} \to$$

$$\to u = ln\frac{1}{\frac{1-\alpha_2}{1+\alpha_2^2}(x_2 - \alpha_2x_1) + C};$$

$$b)\ C_1 \neq 0 \to \frac{d\varphi}{(\alpha_2-1)e^{\varphi}+C_1} = \frac{d\omega}{\alpha_2^2+1} \to$$

$$\to \frac{d\varphi}{e^{\varphi}+C_3} = \frac{\alpha_2-1}{\alpha_2^2+1}d\omega \to \varphi = \ln\frac{C_3}{\Phi(\omega)+1},$$

де

$$\Phi(\omega) = C_1 \exp\left(\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2^2 + 1} C_3 \omega\right), \quad C_3 = \frac{C_1}{1 - \alpha_2}.$$

Враховуючи вигляд анзацу, отримаємо:

$$u = \ln \frac{C_3}{C_1 \exp\left(\frac{C_1}{\alpha_2^2+1}(\alpha_2 x_1 - x_2)\right) + 1}.$$

Провівши аналогічні міркування можна знайти точні розв'язки рівняння (2) для решти випадків функції $F(u)$ з таблиці 1.

4. Висновки. В даній роботі виконано симетрійну класифікацію нелінійного рівняння (2). Симетрійні властивості даного рівняння використані для побудови інваріантних анзаців, які редукують рівняння (2) до диференціальних рівнянь відносно меншої кількості незалежних змінних. В результаті розв'язування редукованих рівнянь побудовані деякі точні розв'язки рівняння (2).

Автор виражає подяку своєму науковому керівнику В.О. Марченку за постановку задачі та цінні рекомендації.

[1] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.

[2] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.

[3] Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгруповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1991. – 304 с.