

# (1+1)-вимірні нелінійні еволюційні рівняння другого порядку з максимальними ліївськими симетріями

*В.М. Бойко, О.В. Локазюк*

*Інститут математики НАН України, Київ*

*E-mail: boyko@imath.kiev.ua, sasha.lokazuik@gmail.com*

Знайдено явний вигляд перетворень, що пов'язують нелінійні (1+1)-вимірні еволюційні рівняння другого порядку з максимальними семивимірними алгебрами ліївських симетрій.

We have established the explicit forms of the transformations that connect nonlinear (1+1)-dimensional evolution equations of the second order with maximal seven-dimensional Lie symmetry algebras.

Розглянемо клас (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь порядку  $n$

$$u_t = F(t, x, u, u_1, \dots, u_n), \quad (1)$$

де  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $u_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}$ ,  $i = 0, \dots, n$ ,  $u_0 \equiv u$ ,  $n \geq 2$ ,  $F$  — довільна гладка функція. Також будемо використовувати позначення  $u_x, u_{xx}, \dots$  для похідних за змінною  $x$ .

Симетрійним властивостям рівнянь з класу (1) присвячено багато досліджень. Крім того, у багатьох випадків саме еволюційні рівняння з класу (1), як правило, виступають базовими прикладами в симетрійному аналізі диференціальних рівнянь (див., наприклад, монографії [6, 9, 15, 17]).

Відповідно до результатів В.В. Соколова [18, р. 173] та Б.А. Магадєєва [12, р. 346] (див. також статтю Р.З. Жданова [19]) контактні перетворення, які зберігають вигляд еволюційних рівнянь (1), вичерпуються перетвореннями

$$\tilde{t} = \varkappa(t), \quad \tilde{x} = \phi(t, x, u, u_x), \quad \tilde{u} = \psi(t, x, u, u_x),$$

де функції  $\phi$  та  $\psi$  задовольняють умову контактності

$$\phi_{u_x}(u_x\psi_u + \psi_x) = \psi_{u_x}(u_x\phi_u + \phi_x).$$

Б.А. Магадєєвим [12, теорема 0.1] доведено, що розмірність алгебри контактних симетрій (Cont)  $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь (1) не перевищує  $n + 5$  або дорівнює  $\infty$ . В останньому випадку еволюційні рівняння зводяться до лінійних за допомогою контактних перетворень. У цій же роботі автором отримано повний перелік алгебр скінченновимірних контактних симетрій еволюційних рівнянь та показано, як описати еволюційні рівняння, які допускають задану алгебру контактної симетрії.

Зокрема, згідно з [12, теорема 3.5], будь-яке рівняння з класу (1) з максимальною  $(n + 5)$ -вимірною алгеброю контактних симетрій, еквівалентне рівнянню

$$u_t = u_n^{\frac{1-n}{1+n}}.$$

При цьому відповідна алгебра контактних симетрій має вигляд [12, див. доведення теореми 3.5 та додаток]:

$$\mathfrak{g}_{M1} = \langle 1, x, \dots, x^k, u_x, -\frac{n-1}{2}u + xu_x, x^2u_x - (n-1)xu, u_t, tu_t + \lambda u \rangle, \quad (2)$$

де  $k = 1, \dots, n-1$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda = -\frac{n+1}{2n}$ ,  $\varphi = \{1, x, \dots, tu_t + \lambda u\} - (n+5)$ -компонентна генеруюча функція інфінітезимального оператора

$$Q = \tau(t)\partial_t + \xi(t, x, u, u_x)\partial_x + \eta(t, x, u, u_x)\partial_u + \zeta(t, x, u, u_x)\partial_{u_t} + \rho(t, x, u, u_x)\partial_{u_x}$$

з коефіцієнтами  $\tau$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\rho$ , які визначаються наступним чином [11, 19]:

$$\begin{aligned} \tau &= -\phi_{u_t}, & \xi &= -\phi_{u_x}, & \eta &= \phi - u_t\phi_{u_t} - u_x\phi_{u_x}, \\ \zeta &= \phi_t + u_t\phi_u, & \rho &= \phi_x + u_x\phi_u. \end{aligned}$$

Для довільного  $n \geq 2$  всі базисні елементи алгебри (2) є продовженнями відповідних ліївських симетрій (тобто алгебра (2) є тривіальною алгеброю контактних симетрій). Зокрема, для  $n = 2$  ця алгебра має вигляд

$$\mathfrak{g}_{n=2} = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, 2x\partial_x + u\partial_u + u_t\partial_{u_t} - u_x\partial_{u_x}, \dots \rangle$$

$$\begin{aligned} & x\partial_u + \partial_{u_x}, 4t\partial_t + 3u\partial_u - u_t\partial_{u_t} + 3u_x\partial_{u_x}, \\ & x^2\partial_x + xu\partial_u + xu_t\partial_{u_t} - xu_x\partial_{u_x} \end{aligned}$$

і є продовженням алгебри ліївських (точкових) симетрій рівняння  $u_t = u_{xx}^{-1/3}$  (див. реалізацію (5) нижче). Умови на функцію  $F$ , при яких клас (1) допускає лише тривіальні контактні перетворення, отримано в роботі [13].

У роботі [19] Р.З. Ждановим встановлено зв'язок між потенціальними та контактними симетріями еволюційних рівнянь (1), а також запропоновано підхід до класифікації таких рівнянь.

Свіжий огляд та останні результати щодо неklasичних симетрій еволюційних рівнянь можна знайти в роботі [8].

Значне місце в літературі приділяється знаходженню ліївських симетрій еволюційних рівнянь. Крім того, вивчаються симетрійні властивості різноманітних підкласів класу (1) при  $n = 2, 3$ . У роботі [5], І.Ш. Ахатов, Р.К. Газізов та Н.Х. Ібрагімов розглянули локальні та нелокальні симетрії для деяких класів еволюційних рівнянь другого порядку, а саме для рівнянь нелінійної теплопровідності, нелінійної фільтрації та газової динаміки. Зокрема, у цій роботі знайдено групу еквівалентності та виконано повну групову класифікацію класу  $u_t = H(u_{xx})$ . Якщо виключити з розгляду лінійний випадок, то при довільній функції  $H$  цей клас допускає п'ятивимірну алгебру ліївських симетрій. Крім того, існує 5 нееквівалентних випадків розширення цієї п'ятивимірної алгебри. У випадку степеневій, логарифмічній та експоненціальної нелінійності, алгебра інваріантності — шестивимірною, а семивимірну алгебру допускають два наступні рівняння [5]:

$$u_t = u_{xx}^{-1/3}, \quad (3)$$

$$u_t = u_{xx}^{1/3}. \quad (4)$$

Згідно з [5], максимальні ліївські алгебри інваріантності рівнянь (3) та (4) наступні:

$$\mathfrak{g}_{AG11} = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, x\partial_u, 4t\partial_t + 3u\partial_u, x^2\partial_x + xu\partial_u \rangle, \quad (5)$$

$$\mathfrak{g}_{AG12} = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, x\partial_u, 2t\partial_t + 3u\partial_u, u\partial_x \rangle. \quad (6)$$

У роботах [4, 7] вивчено симетрійні властивості класу

$$u_t + uu_x = F(u_n).$$

Зокрема, показано, що рівняння

$$u_t + uu_x = u_{xx}^{1/3} \quad (7)$$

допускає семивимірну алгебру Лі

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\text{BF}} = \langle \partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u, 4t\partial_t + 5x\partial_x + u\partial_u, \\ u\partial_x, (2t - x)\partial_x + u\partial_u, (tu - x)(t\partial_x + \partial_u) \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

У роботах [1, 2] за допомогою техніки розгалуженого розщеплення виконано повну групову класифікацію ліївських симетрій підкласів  $u_t + uu_x = H(u_n)$  та  $u_t = H(u_n)$  відповідно, де  $n \geq 3$ . Див. [16] та список літератури в цій роботі щодо методу розгалуженого розщеплення та інших сучасних алгебраїчних технік симетрійної класифікації диференціальних рівнянь.

Оскільки, згідно з результатом Б.А. Магадєєва [12], існує єдине з точністю до контактних перетворень еквівалентності (1+1)-вимірне еволюційне рівняння другого порядку з семивимірною максимальною алгеброю контактних симетрій, то основна мета цієї роботи полягає в наступному: знайти перетворення, що пов'язують нелінійні (1+1)-вимірні еволюційні рівняння (3), (4) та (7).

Відомо, що рівняння (4) зводиться до рівняння (3) за допомогою контактного перетворення (див. [10, 14])

$$t = -\tilde{t}, \quad x = \tilde{u}_{\tilde{x}}, \quad u = \tilde{x}\tilde{u}_{\tilde{x}} - \tilde{u}, \quad u_t = \tilde{u}_{\tilde{t}}, \quad u_{xx} = \frac{1}{\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}}, \quad (9)$$

де  $\tilde{u}$  — нова залежна змінна та  $\tilde{t}$ ,  $\tilde{x}$  — нові незалежні змінні.

Зауважимо, що рівняння (4) інваріантне щодо перетворення годографа [3, с. 409]

$$t = \tilde{t}, \quad x = \tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}), \quad u(t, x) = \tilde{x}, \quad u_t = -\tilde{u}_{\tilde{t}}, \quad u_{xx} = -\frac{1}{\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}}.$$

Таким чином, рівняння нелінійної теплопровідності (4) — ще один приклад годограф-інваріантного еволюційного рівняння другого порядку поряд з рівняннями швидкої дифузії  $u_t = u_{xx}u_x^{-1}$  та фільтрації  $u_t = u_{xx}(1 + u_x^2)^{-1}$ .

Нами знайдено модифіковане перетворення годографа

$$t = \tilde{t}, \quad x = \tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}) + \tilde{x}\tilde{t}, \quad u(t, x) = \tilde{x},$$

$$u_t = -\frac{\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{x}}{\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{t}}, \quad u_x = \frac{1}{\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{t}}, \quad u_{xx} = -\frac{\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}}{(\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{t})^3}, \quad (10)$$

яке зводить рівняння (7) до рівняння (4).

Отже, нелінійні рівняння (4) та (7) з семивимірними максимальними алгебрами інваріантності зводяться до нелінійного рівняння теплопровідності (3) з класифікації Б.А. Магадеева за допомогою контактного перетворення (9) та узагальненого перетворення годографа (10), а відповідні алгебри (6) та (8) ізоморфні з точністю до контактних перетворень алгебри (5).

- [1] Бойко В.М., Попович В.О., Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь, *Праці Ін-ту мат. НАН України* **36** (2001), 45–50.
- [2] Ічанська Н.В., Еволюційні рівняння та системи інваріантні відносно конформної алгебри, *Зб. праць Ін-ту мат. НАН України* **3** (2006), no. 2, 159–169.
- [3] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. Точные решения, Физматлит, Москва, 2002.
- [4] Фушич В.І., Бойко В.М., Галілей-інваріантні рівняння типу Бюргерса та Кортевега-де Фріза високого порядку, *Укр. мат. журн.* **48** (1996), 1589–1601.
- [5] Akhatov I.Sh., Gazizov R.K., Ibragimov N.Kh., Nonlocal symmetries. A heuristic approach, *J. Soviet Math.* **55** (1991), 1401–1450.
- [6] Bluman G.W., Kumei S., Symmetries and differential equations, Springer, New York, 1989.
- [7] Boyko V.M., On new generalizations of the Burgers and Korteweg-de Vries equations, in *Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics* (Kyiv, 1997), Inst. Math. of NAS of Ukraine, Kiev, 1997, Vol. 1, 122–129.
- [8] Boyko V.M., Kunzinger M., Popovych R.O., Singular reduction modules of differential equations, *J. Math. Phys.* **57** (2016), 101503, 34 pp.
- [9] Fushchich W.I., Shtelen W.M., Serov N.I., Symmetry analysis and exact solutions of equation of nonlinear mathematical physics, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1993.
- [10] Gazizov R.K., Potential filtration equation, in *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, Vol. 1, Boca Raton, Chemical Rubber Company, 1994, 131–132.
- [11] Ibragimov N.H., Transformation groups applied to mathematical physics, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1985.

- [12] Magadeev B.A., On group classification of nonlinear evolution equations, *St. Petersburg Math. J.* **5** (1994), 345–359.
- [13] Momoniat E., Mahomed F.M., The existence of contact transformations for evolution-type equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999), 8721–8730.
- [14] Pukhnachov V.V., Nonlocal symmetries in nonlinear heat equations, in *Energy Methods in Continuum Mechanics* (Oviedo, 1994), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996, 75–99.
- [15] Olver P.J., Applications of Lie groups to differential equations, 2nd ed., *Graduate Texts in Mathematics*, Vol. 107, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [16] Opanasenko S., Boyko V., Popovych R.O., Enhanced group classification of nonlinear diffusion-reaction equations with gradient-dependent diffusion, arXiv:1804.08776.
- [17] Ovsyannikov L.V., Group analysis of differential equations, Academic Press, New York, 1982.
- [18] Sokolov V.V., On the symmetries of evolution equations, *Russian Math. Surveys* **43** (1988), 165–204.
- [19] Zhdanov R., On relation between potential and contact symmetries of evolution equations, *J. Math. Phys.* **50** (2009), 053522, 9 pp.