Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 3, 319–331

УДК 517.927

В. О. Солдатов

Інститут математики НАН України, Київ;
soldatovvo@ukr.net, soldatov@imath.kiev.ua

Критерій неперервності за параметром розв'язків багатоточкових крайових задач

We investigate a broad class of parameter-dependent multipoint linear boundary-value problems for systems of r-order ordinary differential equations whose solutions belong to the complex space $C^{(n)}$, with $1 \leq r \leq n \in \mathbb{Z}$. The boundary conditions can contain derivatives $y^{(l)}$, with $1 \leq l \leq n$, of the solution y to the system. We obtain a constructive criterion under which the solution is continuous in the normed space $C^{(n)}$ with respect to the parameter.

Досліджено широкий клас залежних від параметра багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку r, розв'язки яких належать комплексному простору $C^{(n)}$, де $1 \leq r \leq n \in \mathbb{Z}$. Крайові умови можуть містити похідні $y^{(l)}$, де $1 \leq l \leq n$, розв'язку системи y. Отримано конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язку в нормованому просторі $C^{(n)}$.

1. Вступ

У сучасній математиці важливу роль відіграє граничний перехід у системах диференціальних рівнянь. Найкраще його властивості були досліджені у випадку задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Так, для нелінійних систем фундаментальні результати стосовно неперервності за параметром розв'язків задачі Коші були одержані І. І. Гіхманом [1], М. А. Красносельським і С. Г. Крейном [2], Я. Курцвейлєм і З. Ворелом [3]. Для лінійних же систем ці результати були уточнені і доповнені А. Ю. Левіним [4], З. Опялем [5], В. Т. Рейдом [6] та Нгуен Тхе Хоаном [7].

Крайові задачі, залежні від параметра, досліджено значно гірше, ніж задачу Коші. У недавніх роботах [8 – 11] і [12 – 14] було введено класи тотальних крайових задач щодо просторів Соболєва та просторів $C^{(n)}[a, b]$ відповідно, де була встановлена їх фредгольмовість та були сформульовані достатні умови [8 – 10, 12, 13], а пізніше і критерії [11, 14] неперервної залежності їх розв'язків за параметром. На відміну від звичайних крайових задач, клас тотальних крайових задач пов'язаний із заданим функціональним простором. Крайові умови розглядалися у формі $By = q$, де B — довільний лінійний неперервний оператор, що діє з розглянутого функціонального простору. Так, наприклад, крайові умови тотальних щодо просторів $C^{(n)}[a, b]$ крайових задач можуть бути некласичними, тобто містити похідні $y^{(l)}$, де $1 \leq l \leq n$, розв'язку системи y. Зауважимо, що зокрема і некласичні багатоточкові задачі, які вивчаються у даній роботі, належать до цього класу.

Згадані результати були застосовані до дослідження багатоточкових крайових задач [15 – 18], матриць Гріна [19 – 21] та використані у спектральній теорії диференціальних операторів із сингулярними коефіцієнтами [22 – 24]. Відмітимо, що в роботі [18] було досліджено клас залежних від параметра багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь високих порядків у новій більш загальній постановці для серій точок крайової умови. Для таких задач в [18] були встановлені достатні умови неперервності розв'язків за параметром у просторі $C^{(n)}[a, b]$. У зв'язку з цим постає закономірне питання про необхідність розглянутих умов. Можна показати, що необхідність таких умов у розглянутій постановці довести не можна, проте ніщо не заважає дещо змінити постановку крайової задачі так, щоб розглянуті умови вже були б не лише достатніми, а й необхідними. Саме втіленню цієї ідеї і присвячена дана стаття.

У даній роботі отримано конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків багатоточкових лінійних крайових задач на відрізку $[a, b]$ дійсної осі для системи диференціальних рівнянь довільного $1 \le r \le n$ порядку у нормованому просторі $C^{(n)}$. Для їх крайових умов припускається наступне: існують околи $\delta_j \subset [a, b]$, $j \in \overline{1, p}$, точок $t_j(0)$, в яких розглядається гранична багатоточкова крайова умова (при $\varepsilon = 0$) в топології відрізка $[a, b]$ такі, що їх замикання попарно не перетинаються, і при достатньо малих ε для кожного номера $j \in \overline{1, p}$ точки (в яких розглядається багатоточкова крайова умова) $t_j(\varepsilon) \in \delta_j$.

2. Постановка задачі

Нехай довільним чином вибрано (скінченний) відрізок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, цілі числа $m \ge 1$, $n \ge 1$. Використовуємо комплексні банахові простори

$$(C^{(l)})^m := C^{(l)}([a, b], \mathbb{C}^m), \quad (C^{(l)})^{m \times m} := C^{(l)}([a, b], \mathbb{C}^{m \times m}), \quad (1)$$

де $0 \le l \in \mathbb{Z}$. Вони складаються відповідно з усіх вектор-функцій та матриць-функцій порядку m, елементи яких належать до банахового простору $C^{(l)} := C^{(l)}([a, b], \mathbb{C})$ усіх l разів неперервно диференційовних функцій $x : [a, b] \to \mathbb{C}$, який наділений нормою

$$\|x\|_l := \sum_{j=0}^{l} \max\{|x^{(j)}(t)| : t \in [a, b]\}.$$

Простори (1) наділені нормами, що є сумою норм у $C^{(l)}$ усіх компонентів цих функцій. Відмітимо, що кожен простір $C^{(l)}$ є банаховою алгеброю відносно деякої норми, еквівалентної $\| \cdot \|_l$.

Норми у просторах (1) також позначено як $\|\cdot\|_l$. З контексту завжди буде зрозуміло, у якому саме просторі (скалярних, векторчи матриць-функцій) розглядається ця норма.

Розглядаємо систему $m \geq 1$ лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \leq n$, залежних від числового параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{r} K_{r-j}(t,\varepsilon) y^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \leq t \leq b. \qquad (2)$$

Тут і далі число $\varepsilon_0 > 0$ фіксоване, вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^m$ є шуканою та довільним чином задано матриці-функції $K_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n-r)})^{m\times m}$ і вектор-функцію $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n-r)})^m$. У роботі вектори і вектор-функції подано у вигляді стовпців.

Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ пов'яжемо із системою (2) багатоточкову крайову умову

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) \equiv \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n} \beta_{j,l}(\varepsilon)\, y^{(l)}(t_j(\varepsilon)) = q(\varepsilon). \qquad (3)$$

Тут число $p \in \mathbb{N}$, усі числові матриці $\beta_{j,l}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_j(\varepsilon) \in [a,b]$ та вектор $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ є заданими. Крім того вимагатимемо: для кожного $j \in \overline{1,p}$ існують такі відкриті множини $\delta_j \subset [a,b]$, що є околами точок $t_j(0)$ в топології відрізка $[a,b]$ такі, що їх замикання попарно не перетинаються, і точки $t_j(\varepsilon) \in \delta_j$ при достатньо малих ε.

Зауважимо, що саме останні обмеження на структуру точок крайової умови є суттєвими для подальшого розгляду.

Звісно, для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ лінійне відображення $y(\cdot,\varepsilon) \mapsto B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon)$ є обмеженим оператором

$$B(\varepsilon)\colon (C^{(n)})^m \to \mathbb{C}^m. \qquad (4)$$

Зроблені нами припущення щодо системи (2) та обмеженість оператора (4) означають згідно з [14], що крайова задача (2), (3) є тотальною щодо простору $C^{(n)}$ для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$. Для таких крайових задач у цитованій роботі [13] обґрунтовано їх фредгольмовість з індексом нуль, а в [14] доведено критерій неперервності за параметром їх розв'язків.

3. Основний результат

Для крайової задачі (2), (3) розглянемо такі

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(I) $K_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \to K_{r-j}(\cdot,0)$ для усіх $j \in \overline{1,r}$ в $(C^{(n-r)})^{m\times m}$;

(III) $f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0)$ в $(C^{(n-r)})^{m}$;

(IV) $q(\varepsilon) \to q(0)$ в $\mathbb{C}^m$.

Тут і надалі всі границі розглядаються при умові $\varepsilon \to 0$, якщо інше не буде вказано окремо.

Розглянемо ще одну умову.

Умова (0). *Гранична однорідна крайова задача*

$$L(0)y(t,0) = 0, \quad a \le t \le b, \qquad B(0)y(\cdot,0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Звідси випливає, що граничний оператор $B(0)$ не є нуль-оператором.

Базове означення. Говоримо, що розв'язок крайової задачі (2), (3) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються такі дві умови:

($*$) Існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$ і будь-яких правих частин $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n-r)})^m$ і $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^m$.

($**$) Граничні умови (III) і (IV) тягнуть за собою збіжність

$$y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (C^{(n)})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{5}$$

Для довільного цілого числа $s \geq 0$ розглянемо всі неперервні оператори вигляду (3)

$$B_s(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) \equiv \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=0}^{s}\beta_{j,l}(\varepsilon)\, y^{(l)}(t_j(\varepsilon)), \tag{6}$$

що діють

$$B_s(\varepsilon)\colon (C^{(s)})^m \to (\mathbb{C})^m.$$

Для класу таких операторів сформулюємо таку властивість

Теорема 1. *Нехай оператор вигляду* (6) *не є нуль-оператором. Тоді він задовольняє умову*

$$\text{(II)}\; B(\varepsilon)y \to B(0)y \quad \textit{в} \quad \mathbb{C}^m \quad \textit{для кожного} \quad y \in C^{(s)}$$

при $\varepsilon = 0$, тоді і тільки тоді, коли він задовольняє граничні умови

(b1) $t_j(\varepsilon) \to t_j(0)$ *для усіх* $j \in \overline{1,p}$*;*

(b2) $\beta_{j,l}(\varepsilon) \to \beta_{j,l}(0)$ *для усіх* $l \in \overline{0,s}$, $j \in \overline{1,p}$.

Сформулюємо основний результат статті.

Теорема 2. *Розв'язок багатоточкової крайової задачі* (2), (3) *неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (0)*, граничні умови* (I) *і*

(b1) $t_j(\varepsilon) \to t_j(0)$ *для усіх* $j \in \overline{1,p}$*;*

(b2) $\beta_{j,l}(\varepsilon) \to \beta_{j,l}(0)$ *для усіх* $l \in \overline{0,n+r}$, $j \in \overline{1,n+r}$.

4. Доведення основного результату

***Доведення теореми* 1.** Достатність розглянутих умов є наслідком результату про сильну збіжність багатоточкового оператора в [18] (в цій роботі була розглянута більш загальна постановка задачі, але можна показати, що її можна звести до розглянутої в даній статті, якщо вважати, що кожна серія складається лише з однієї точки. В такому вигляді умови сильної збіжності крайового оператора в [18] значно спростяться і набудуть вигляду (b1), (b2)).

Доведемо спочатку необхідність розглянутих умов для випадку одноточкової задачі.

Лема 3. *Нехай для деякого фіксованого номера j_0 і оператора*

$$B_{j_0}(\varepsilon)y(\cdot) \equiv \sum_{l=0}^{s} \beta_{j_0,l}(\varepsilon)\, y^{(l)}(t_{j_0}(\varepsilon)) \tag{7}$$

виконується умова (0). *Тоді із умови* (II)

$$B_{j_0}(\varepsilon)y \to B_{j_0}(0)y \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^m \quad \text{для кожного} \quad y \in C^{(n)}$$

при $\varepsilon = 0$ випливають умови

(b1_{j_0}) $t_{j_0}(\varepsilon) \to t_{j_0}(0)$
(b2_{j_0}) $\beta_{j_0,l}(\varepsilon) \to \beta_{j_0,l}(0)$ *для усіх $l \in \overline{0,n}$.*

Проведемо доведення методом математичної по n.

Для $n = 0$ для кожного числа $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ і довільної вектор-функції $y \in (C^{(0)})^m$ покладемо:

$$B^0_{j_0}(\varepsilon)y := \beta_{j_0,0}(\varepsilon)y(t_{j_0}(\varepsilon)). \tag{8}$$

Розглянемо вектор-функцію

$$y = \mathrm{col}(y_1, \ldots, y_m) \in (C^{(0)})^m \tag{9}$$

таку, що для деякого номера $k \in \overline{1,m}$ $y_k(t) \equiv 1$ в δ_{j_0}-околі точки $t_{j_0}(0)$ і $y_k(t) \equiv 0$ поза його межами, а $y_l(t) \equiv 0$ при $l \neq k$. Для такої функції маємо на підставі граничної умови (II) співвідношення

$$B^0_{j_0}(\varepsilon)y = \beta_{j_0,0}(\varepsilon)y(t(\varepsilon)) \to \beta_{j_0,0}(\varepsilon)y(t(\varepsilon)) = B^0_{j_0}(0)y.$$

Отже, k-ий стовпець матриці $\beta_{j_0,0}(\varepsilon)$ збігається до k-ого стовпця матриці $\beta_{j_0,0}(0)$. Таким чином, $\beta_{j_0,0}(\varepsilon) \to \beta_{j_0,0}(0)$ з огляду на довільність вибору номера $k \in \overline{1,m}$.

Доведемо, що крайовий оператор (8) задовольняє умову ($\mathrm{b}1_{j_0}$). Розглянемо окремо випадки, коли $\beta_{j_0,0}(0) \neq O_m$ і коли $\beta_{j_0,0}(0) = O_m$.

Припустимо спочатку, що $\beta_{j_0,0}(0) \neq O_m$. Тоді числова матриця $\beta_{j_0,0}(0)$ містить принаймні один елемент $\theta \neq 0$; нехай він розташований у j-ому рядку і k-ому стовпці цієї матриці. Доведемо, що $t_{j_0}(\varepsilon) \to t_{j_0}(0)$. Припустимо супротивне; тоді існує нескінченно мала послідовність $(\varepsilon_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \subset (0, \varepsilon_0)$ і число $\tau \neq t_{j_0}(0)$ такі, що $t_{j_0}(\varepsilon_\nu) \to \tau$ при $\nu \to \infty$. Розглянемо вектор-функцію (9) таку, що $y_k(t) = 1$ у достатньо малому околі точки $t_{j_0}(0)$ і $y_k(t) = 0$ у достатньо малому околі точки τ та $y_l(t) \equiv 0$ при $l \neq k$. Для цієї функції $B^0_{j_0}(\varepsilon_\nu)y \to B^0_{j_0}(0)y$ при $\nu \to \infty$ згідно з граничною умовою (II), де

$$B^0_{j_0}(\varepsilon_\nu)y = \beta_{j_0,0}(\varepsilon_\nu)y(t(\varepsilon_\nu)) = 0 \in \mathbb{C}^m \quad \text{при} \quad \nu \gg 1.$$

Тому

$$0 = B^0_{j_0}(0)y = \beta_{j_0,0}(0)y(t_{j_0}(0)),$$

звідки $\theta = 0$, оскільки j-ий елемент вектора $\beta_{j_0,0}(0)y(t(0))$ дорівнює θ. Отримали протиріччя, яке і доводить збіжність $t_{j_0}(\varepsilon) \to t_{j_0}(0)$.

Випадок, коли $\beta_{j_0,0}(0) = O_m$, суперечить умові (0) при $n = 0$, а отже не входить до розглянутої задачі.

Введемо позначення

$$B^{n-1}_{j_0}(\varepsilon)y \equiv \sum_{l=0}^{n-1} \beta_{j_0,l}y^{(l)}(t_{j_0}(\varepsilon)). \tag{10}$$

Тепер для довільного цілого $n - 1 \geq 0$ припустимо, що для всіх операторів вигляду (10) з умов (II) і (0) випливають умови ($\mathrm{b}1_{j_0}$), ($\mathrm{b}2_{j_0}$). Доведемо, що це так і для n.

Розглянемо оператор (7). Можна помітити, що його дію можна представити наступним чином:

$$B_{j_0}(\varepsilon)y = B^0_{j_0}(\varepsilon)y + P^{n-1}_{j_0}(\varepsilon)y',$$

де оператор $P_{j_0}^{n-1}(\varepsilon)$ належить класу (10), а отже для нього справджується наше індуктивне припущення.

Для кожного числа $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ і довільної вектор-функції $y \in (C^{(n)})^m$ покладемо:

$$B_{j_0}^0(\varepsilon)y := \beta_{j_0,0}(\varepsilon)y(t_{j_0}(\varepsilon)). \tag{11}$$

Розглянемо вектор-функцію

$$y = \mathrm{col}(y_1,\dots,y_m) \in (C^{(0)})^m \tag{12}$$

таку, що для деякого номера $k \in \overline{1,m}$ $y_k(t) \equiv 1$ в δ_{j_0}-околі точки $t_{j_0}(0)$ і $y_k(t) \equiv 0$ поза його межами, а $y_l(t) \equiv 0$ при $l \neq k$. Для такої функції маємо на підставі граничної умови (II) співвідношення

$$B(\varepsilon)y = \beta_{j_0,0}(\varepsilon)y(t(\varepsilon)) \to \beta_{j_0,0}(\varepsilon)y(t(\varepsilon)) = B(0)y.$$

Отже, k-ий стовпець матриці $\beta_{j_0,0}(\varepsilon)$ збігається до k-ого стовпця матриці $\beta_{j_0,0}(0)$. Таким чином, $\beta_{j_0,0}(\varepsilon) \to \beta_{j_0,0}(0)$ з огляду на довільність вибору номера $k \in \overline{1,m}$.

Доведемо, що крайовий оператор (11) задовольняє умову $(\mathrm{b}1_{j_0})$. Розглянемо окремо випадки, коли $\beta_{j_0,0}(0) \neq O_m$ і коли $\beta_{j_0,0}(0) = O_m$.

Припустимо спочатку, що $\beta_{j_0,0}(0) \neq O_m$. Тоді числова матриця $\beta_{j_0,0}(0)$ містить принаймні один елемент $\theta \neq 0$; нехай він розташований у j-ому рядку і k-ому стовпці цієї матриці. Доведемо, що $t_{j_0}(\varepsilon) \to t_{j_0}(0)$. Припустимо супротивне; тоді існує нескінченно мала послідовність $(\varepsilon_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \subset (0,\varepsilon_0)$ і число $\tau \neq t_{j_0}(0)$ такі, що $t_{j_0}(\varepsilon_\nu) \to \tau$ при $\nu \to \infty$. Розглянемо вектор-функцію (12) таку, що $y_k(t) = 1$ у достатньо малому околі точки $t_{j_0}(0)$ і $y_k(t) = 0$ у достатньо малому околі точки τ та $y_l(t) \equiv 0$ при $l \neq k$. Для цієї функції $B_{j_0}(\varepsilon_\nu)y \to B_{j_0}(0)y$ при $\nu \to \infty$ згідно з граничною умовою (II), де

$$B_{j_0}^0(\varepsilon_\nu)y = \sum_{l=0}^{n} \beta_{j_0,l}(\varepsilon_\nu)y^{(l)}(t(\varepsilon_\nu)) = 0 \in \mathbb{C}^m \quad \text{при} \quad \nu \gg 1.$$

Тому
$$0 = B^0_{j_0}(0)y = \beta_{j_0,0}(0)y(t_{j_0}(0)),$$
звідки $\theta = 0$, оскільки j-ий елемент вектора $\beta_{j_0,0}(0)y(t(0))$ дорівнює θ. Отримали протиріччя, яке і доводить збіжність $t_{j_0}(\varepsilon) \to t_{j_0}(0)$.

Звідси для довільної вектор-функції $y \in (C^{(n)})^m$ маємо збіжність
$$B^0_{j_0}(\varepsilon)y \to B^0_{j_0}(0)y.$$
Тому на підставі граничної умови (II) для довільної вектор-функції $y \in (C^{(n)})^m$ маємо збіжність
$$P^{n-1}_{j_0}(\varepsilon)y' = B_{j_0}(\varepsilon)y - B^0_{j_0}(\varepsilon)y \to B_{j_0}(0)y - B^0_{j_0}(0)y = P^{n-1}_{j_0}(0)y'.$$

Дослідимо випадок, коли $\beta_{j_0,0}(0) = O_m$. Оскільки за доведеним $\beta_{j_0,0}(\varepsilon) \to \beta_{j_0,0}(\varepsilon)$, то $B^0_{j_0}(0)y \to 0$ у цьому випадку. Тому на підставі граничної умови (II) для довільної вектор-функції $y \in (C^{(n)})^m$ маємо збіжність
$$P^{n-1}_{j_0}(\varepsilon)y' = B_{j_0}(\varepsilon)y - B^0_{j_0}(\varepsilon)y \to B_{j_0}(0)y = P^{n-1}_{j_0}(0)y'.$$

Таким чином маємо сильну збіжність

Необхідність розглянутих умов теореми 1 випливає з леми 3. Справді, з огляду на довільність вибору номера $j_0 \in \overline{1,p}$ та враховуючи той факт, що замикання δ_j-околів точок $t_j(0)$ попарно не перетинаються, що було забезпечено при постановці задачі, для кожної точки $t_j(0)$ окремо можна провести міркування, аналогічні представленим у доведенні леми 3. Теорему 1 доведено.

Доведення теореми 2. Теорема 2 є прямим наслідком теореми 1 і основного результату роботи [14], який у застосуванні до розглянутої нами задачі набуде вигляду:

Твердження 4. *Розв'язок крайової задачі* (2), (3) *неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (0), *граничні умови* (I) *і* (II).

Автор вдячний О. О. Мурачу за допомогу при постановці задачі і в обговоренні результатів.

Література

[1] *Гихман И. И.* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова // Укр. мат. журн. – 1952. – **4**, № 2. – С. 215–219.

[2] *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи мат. наук. – 1955. – **10**, вып. 3. – С. 147–153.

[3] *Курцвейль Я., Ворел З.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Чех. мат. журн. – 1957. – **7**, № 4. – С. 568–583.

[4] *Левин А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ // Докл. АН СССР. – 1967. – **176**, № 4. – С. 774–777.

[5] *Opial Z.* Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations // J. Different. Equat. – 1967. – **3**. – P. 571–579.

[6] *Reid W. T.* Some limit theorems for ordinary differential systems // J. Different. Equat. – 1967. – **3**, № 3. – P. 423–439.

[7] *Nguyen The Hoan.* On the dependence of a solution to a linear system of differential equations on a parameter // Differ. Equa. – **29**(1993). – P. 830–835.

[8] *Гнып Е. В., Кодлюк Т. И., Михайлец В. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах Соболева // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 5. – С. 584–591; англ. переклад в Ukrainian Math. J. – 2015. – Vol. 67, № 5. – P. 658–667.

[9] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений // Доп. НАН України. – 2008. – № 8. – С. 28–30.

[10] *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // J. Math. Sciences. – 2013. – **190**, № 4. – P. 589–599.

[11] *Гнип Є. В., Михайлецъ В. А., Мурач О. О.* Про критерій неперервної залежності за параметром розв'язків тотальних крайових задач щодо просторів Соболєва // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – **13**, № 2. – С. 111–124.

[12] *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a;b]$ // Доп. НАН України. – 2014. – № 7. – С. 24–28.

[13] *Soldatov V. O.* On the Continuity in a Parameter for the Solutions of Boundary-Value Problems Total with Respect to the Spaces $C^{(n+r)}[a,b]$ // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, No. 5. – P. 785-794.

[14] *Mikhailets V. A., Murach A. A., Soldatov V.* A criterion for continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems for higher-order differential systems // Methods of Functional Analysis and Topology. – Vol. 22 (2016), no. 4, pp. 375–386.

[15] *Чеханова Г.* Непрерывность по параметру решений многоточечных краевых задач // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 260–279.

[16] *Кодлюк Т. И.* Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева // Доп. НАН України. – 2012. — № 11. – С. 15–19.

[17] *Гнип Є. В., Кодлюк Т. І.* Неперервність за параметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових на просторах Соболєва // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 101–112.

[18] *Солдатов В. О.* Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь вищих порядків // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 327–337.

[19] *Чеханова Г. А.* Непрерывность по параметру функций Грина многоточечных краевых задач // Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 4–5. – С. 532–541.

[20] *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A., Reva N. V.* Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 1. – P. 77–90.

[21] *Mikhailets V. A., Chekhanova G. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sciences. – 2015. – **204**, № 3. – P. 333–342.

[22] *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Resolvent convergence of Sturm–Liouville operators with singular potentials // Math. Notes. – 2010. – **87**, № 1–2. – P. 287–292.

[23] *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of two-term differential equations with singular coefficients by quasiderivatives // Ukr. Math. J. – 2012. – **63**, № 9. – P. 1361–1378.

[24] *Goriunov A. S., Mikhailets V. A., Pankrashkin K.* Formally self-ajoint quasi-differential operators and boundary-value problems // Electron. J. Differential Equations. – **2013**, No. 101. – P. 1–16.